BIERING

HISTORIA PROBLEMATIS

CUBI DUPLICANDI

N. 21

Digitized by Google

HISTORIA

PROBLEMATIS CUBI DUPLICANDI.

SPECIMEN HISTORICO-MATHEMATICUM,

QUOD CUM THESIBUS ADJECTIS

SCRIPSIT,

ET AD JURA MAGISTRI ARTIUM RITE ASSEQUENDA

PUBLICE DEFENDERE CONABITUR

CHRISTIANUS HENRICUS BIERING,

Polytechnices candidatus, et scholæ Aalburgensi adjunctus.

DIE 21mo SEPT. HORA LOCOQUE SOLITO.

HAUNIÆ.

TYPIS EXCUSSIT *A. MICHAELSEN.*

MDCCCXLIV.

Specimen hoc inaugurale Facultas philosophica in universitate Hafniensi dignum judicat, quod una cum thesibus adjectis pro gradu Magisterii artium rite obtinendo, publico Eruditorum examini subjiciatur.

Hafniæ d. 10mo Septemb. 1841.

Reinhardt.
h. a. Fac. philos. Decanus.

PATRI DILECTISSIMO,

JOANNI FREDERICO BIERING,

Antistiti Sjællandiæ parochiarum Viig et Asminderup.

QUI SINGULARI AMORE ET CURA IN ATRIUM MINERVÆ

ME JAM MATURE INTRODUXIT,

HANC DISSERTATIONEM

CONSECRATAM ESSE VOLUI.

ARGUMENTUM.

Præfatio.

Quum nobis omnino persuasum esset, vera principia methodi literas docendi ex historia ipsarum literarum esse petenda, et ob eam causam in historia matheseos versari coepissemus, facile nobis apparuit, in historia hujus disciplinæ, quantum ex monumentis, quæ adhuc exstant, judicari potest, tria esse præcipua, unde pleraque inventa mathematica aut originem duxissent aut ad quæ aliquo modo referri possent. Tria illa, quæ eadem totidem historiæ matheseos periodorum initia haberi possunt, hæc sunt:

1) Inventio sectionum solidorum.

2) Inventio algebræ et ejus in quæstionibus geometricis usus.

3) Inventio analyseos infinitorum.

Jam quum partem aliquam historiæ matheseos ita exponere cuperemus, ut haberemus tanquam fundamenta quæstionum, quas aliquando, si non deficient vires neque otium, de methodo mathesin inferiorem docendi instituturi sumus, ad primam periodum, quæ supra commemorata est, maxime adducti sumus. Hac enim periodo mathesis ea ratione culta est, quæ nostro proposito aptissima esse videtur; et, quum plerique secundæ periodi fontes, donec algebra geometriæ adhiberi coepta est, aut omnino desint aut in codicibus Arabicis in bibliothecis adhuc reconditi jaceant, ad hanc periodum historiæ matheseos cognoscendam plurima adsunt subsidia; tertia autem periodus, quæ nostra quoque tempora complectitur, magis ad studium matheseos sublimioris quam ad institutionem mathematicam pertinere videtur.

Itaque quum maxime in prima historiæ matheseos periodo exploranda versaremur, animadvertimus, studia, quibus inventa et exculta est doctrina de sectionibus solidorum aliisque curvis, cum conatibus veterum, qui celeberrima illa problemata cubi duplicandi angulique trisecandi spectarent, fere congruere. Ex historia autem problematis cubi duplicandi, quod ob magnum ejus et in mathesi pura et in vita communi usum quum a veteribus tum a recentioribus usque ad Newtonum sæpissime est tractatum, perspicue apparet, quomodo factum sit, ut homines ad quæstiones mathematicas primo adducerentur, quomodo postea mathesis paulatim exculta sit, quomodo denique fines matheseos veterum analysi recentiorum latius producti sint; ex hac etiam intelligitur, quantum matheseos in vita communi usus valeat ad ipsam scientiam excolendam. Hæc omnia quum ad præceptorem maxime pertinere nobis viderentur, historiam problematis cubi duplicandi, si a prima problematis origine usque ad tempora Newtoni traderemus, non inutile fore putavimus.

CAP. I.

Quantam vim problemati cubi duplicandi veteres tribuerint.

Nullum haud dubie theorema aut problema mathematicum apud veteres magis celebratum est, quam problema cubi duplicandi. Constat hoc problema id agere, ut, cubo quolibet dato, inveniatur latus cubi, cujus volumen sit duplo majus quam datum. Problema autem ita constitutum nihil aliud est nisi casus singularis alius cujusdam problematis, ut inveniatur latus cubi, volumen datum comprehendentis, id quod veteres satis intellexerant.

Intelligunt omnes, qui quidem aliquam scientiam rerum mathematicarum habeant, problema ope matheseos recentioris perfacile et arithmetice et geometrice solvi posse. Non ita veteres, et ea de causa videmus, optimum quemque illorum temporum philosophum in illo problemate solvendo elaborasse. Veteres autem non sine causa tantum studii et laboris cubo duplicando impendisse, ut hoc magis intelligatur, ostendere conabimur, *quanta vis problemati nostro a veteribus tributa sit.*

Temporibus jam antiquissimis vel potius fabulosis veteres in aris, templis, aliisque ædificiis exstruendis et dimetiendis, magno usui fore, si problema cubi duplicandi solvi posset, sentiebant. Probabile etiam est, usum problematis in mensuris, velut medimni et metretæ, constituendis jam antiquissimorum temporum hominibus non ignotum fuisse. Quum autem omnes artes magis magisque excultæ atque perfectæ essent, fieri non potuit, quin nostri quoque problematis summa ad varios vitæ communis usus necessitas animadverteretur; quod imprimis Ptolemæorum ætate apud Alexandrinos factum esse accepimus.

Nam apud eos, quum bella civilia post mortem Alexandri Macedonis orta essent, artes bellicæ magnos progressus fecerunt, et hic primum præcepta mathematica in machinis bellicis, v. c. catapultis, ballistis, scorpionibus, componendis et exstruendis adhibita sunt. Mox enim mathematici, vel potius mechanici, Alexandrini videbant, omnia, quæ ad catapultas et ceteras id genus machinas construendas pertinerent, esse referenda ad dimensionem funis illius torti, qui per rotundum in machinæ capitulo foramen transiens totam ejus capacitatem expleret; et quum dimensio illius funis aut foraminis rotundi esset constituta, omnes reliquas machinæ partes ex ea esse dimetiendas. Quam rationem autem haberent magnitudo foraminis et pondus lapidis, qui ejiceretur, vel longitudo sagittæ, quæ emitteretur, hoc Alexandrini aliquanto demum post invenerunt. Experimentis innumerabilibus enim, munificentia et liberalitate Ptolemæorum factis, hæc ratio postremo a mechanicis Alexandrinis ita est constituta, ut in ballistis diametrus tot digitorum esset, quot efficerentur, si ex numero minarum lapidis centuplicato radix cubica extraheretur, addita insuper ipsius decima parte; in catapultis autem et scorpionibus ut, quantum sagitta, quæ emitteretur, in longitudinem haberet, hujus nonæ parti diametrus foraminis æqualis esset. [*Βελοποιητικα* Heronis (Thevenoti veterum mathematicorum opera. Parisiis 1693. pag. 122 et seqv.). *Βελοποιικα* Philonis (Theven. vet. math. op. Par. 1693. pag. 49 et seqv.)]. In ballistis igitur construendis radix cubica erat extrahenda, quod veteres non aliter commode facere poterant, nisi, ope constructionis geometricæ, latere cubi, cujus volumen erat æquale numero, ex quo radix cubica erat extrahenda, constituto. Ex his patet, quanti momenti apud veteres problema, quod jam sæpius commemoravimus, fuerit ad machinas bellicas exstruendas*).

Quum ob insignem in vita communi utilitatem problema cubi duplicandi antiquissimis illis temporibus a multitudine magnopere celebraretur, et quum huic usui maxime sit tribuendum, quod problema apud veteres in tanto honore fuit, tamen alia et gravior causa fuit, cur mathematici veteres in hoc problemate solvendo tantum studii et laboris consume-

*) Ad radicem quadratam extrahendam veteres methodum quandam cum ea, qua utuntur recentiores, fere consentaneam adhibebant; et videtur similis ratio radicis cubicæ extrahendæ iis non incognita fuisse; sed eam ob difficultatem calculi in usu non fuisse videmus. Conf. Bossut: Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik, übers. von Reimer. Hamburg 1804. 1 Th. pag. 51.

rent. Quum enim omnia problemata et theoremata geometriæ, alia aliis temporibus inventa atque demonstrata et singulatim quoque tradita, in justam disciplinæ formam redigi coepta essent, non fieri potuit, quin mathematici, qui in arte componenda versabantur, multa adhuc interponenda censerent, si mathesis artibus jure esset adnumeranda. Ita factum est, ut clarissimus ille Plato, quum in doctrina de solidis pertractanda versaretur, se maximis difficultatibus obstrictum videret, nisi problema nostrum esset solutum. Has difficultates solutiones, quæ mechanicæ vocantur, nullo modo sustulerunt, quibus nonnulli jam Platonis ætate rem ad instrumenta et opera quædam mechanica revocare studebant. Solutio autem, quæ subtilitati geometricæ satisfaceret, non ex quibusdam experimentis mechanicis, sed ex justis geometriæ legibus erat quærenda. Plato, quum hoc intelligeret, discipulos et familiares sæpius adhortatus est, ut problema cubi duplicandi secundum leges geometriæ investigare omni opera conarentur, quem eundem accepimus discipulos reprehendisse, qui in solutionibus mechanicis inveniendis frustra laborarent.

Itaque non mirum videbitur, quod problema cubi duplicandi, quum vitæ communi tantam utilitatem afferret atque in geometria magno loco esset, et nomine inclyto Platonis esset celebratum, in schola Platonicorum, quæ vocatur, diligentissime tractatum est; unde factum est, ut videamus, omnes fere veteres mathematicos, Platone inferiores, operam aliquam in eo solvendo collocasse.

CAP. II.

De prima problematis origine.

Ut permulta exempla exstant, quomodo vires naturæ multo prius fuerint cognitæ et in usum vitæ communis collatæ, quam homines docti leges, quibus subjectæ essent illæ vires, investigassent, ita etiam in mathesi problemata, communem usum spectantia, sæpenumero proposita esse accepimus, et id temporibus, quibus ne vestigia quidem matheseos ad formam disciplinæ redactæ exstabant. In ejusmodi problematis nostrum adnumerandum est. Nam in epistola ad Ptolemæum regem [vid Eutocii Ascalonitæ commentarii in Archim. lib. II de sphæra et cylindro, prop. 2. (in editione Torelli, Oxonii 1792, pag. 144)], Era-

tosthenes tradit, in tragoedia quadam antiqua, Minoa, celeberrimum illum Cretensium regem, Glauco filio mortuo sepulcrum exstruentem introductum esse. Qui, quum sepulcrum, quod cubi formam habebat, pro regia munificentia nimis exiguam putaret, duplo majus, servata tamen cubi forma, extrui jussit. Ad quod perficiendum, quum architecti unumquodque latus duplo longius fecissent, sepulcrum opere peracto octuplicatum geometras primum stimulavit ad investigandum, quomodo solidum datum, eadem figura servata, posset duplicari. Jam quum geometræ potissimum cubum, tanquam simplicissimum solidorum regularium, sibi proponerent, hoc *problema cubi duplicandi* appellatum esse dicit Eratosthenes.

Tragoedia, in epistola Eratosthenis commemorata, est, ut ait Valckenarius, fabula Euripidis, quæ nunc non exstat, quæ autem inscripta fuerat *Πολυείδος* *), unde seqvitur, ut temporibus Euripidis (c. 450 a. C.) problema cubi duplicandi multitudini non omnino incognitum fuerit. Quod conjicere licet, sive statuas, Euripidem fabulam de sepulcro octuplicato a mojoribus traditam accepisse, sive potius credas, ipsum tragicum, problematis nostri jam antea cogniti memorem, hoc fabulæ ornandæ causa more poetarum ad regem clarissimum Cretensem retulisse. Nobis quidem verisimile videtur, problema cubi duplicandi temporibus Euripidis ænigma geometricum fuisse habitum, cujus autem solvendi ratio illis temporibus nondum esset inventa.

CAP. III.

Quomodo problema cubi duplicandi transeat in illud, ut duæ mediæ continue proportionales inveniantur.

Atque dum problema cubi duplicandi, quanquam nondum solutum, magis magisque in Græcia celebratur, accepimus disciplinam quoque geometriæ, ex Aegypto oriundam, apud

*) Ostendit *Valckenarius* [in „Diatribe in Euripidis perditorum dramatum reliquias" (Lugd. Bat. 1767) pag. 203] hæc verba Eratosthenis

„μικρὸν γ'ἔλεξας βασιλεικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω, τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῇς."

duos continere versus tragicos, qui ita sint recte scribendi:

μικρόν γ'ἔλεξας βασιλικοῦ σηκόν τάφου·
Διπλάσιος ἔστω, τοῦ κύβου δὲ μὴ σφαλῇς.

Græcos diligentissime excultam et multis modis auctam fuisse. Primus quidem inter philosophos Græcos Thales (c. 600 a. Chr.) huic studio se dedisse fertur. Quæ autem ejus de geometria merita fuerint, et quæ theoremata aut problemata ab eo inventa et proposita sint, omnino ignoramus. Optime vero inter philosophos illorum temporum Pythagoras (c. 550 a. Chr.) de geometria meritus est, qui primus et de lineis quibusdam incommensurabilibus et de figuris isoperimetricis et de solidis regularibns disputavit et, quod ad historiam problematis cubi duplicandi maxime pertinet, theorema illud notissimum de quadrato hypothenuseos trianguli rectanguli invenit. Hoc theoremate usi, et ipse Pythagoras et qui post eum florebant philosophi veteres, quorum nemo a studio geometriæ abhorrebat, multa, quæ adhuc incoguita erant, de figuris planis augendis et minuendis in medium proferebant. Sic intellectum est, unam mediam proportionalem esse inveniendam, si quadratum, figura quadratica servata, esset duplicandum. Hoc etiam theoremate philosophos ad veram problematis nostri solvendi rationem primum adductos esse, statuendum videtur, et confirmant hoc historiæ matheseos scriptores, qvi tradunt, *Hippocratem Chium* (c. 450 a. Chr.), qui lunulas ipsius nomine celebratas invenit et primus elementa geometriæ ad formam disciplinæ redegisse dicitur, quum cubum quadrati dimensione uno gradu altiorem esse censeret, ad cubum duplicandum duas inveniri medias continue proportionales necessarium esse, altius investigando intellexisse. Ita factum est, ut problema nostrum congrueret cum hoc, ut duæ mediæ continue proportionales inveniantur.

Not. Si enim notat „a“ (ut morem recentiorum in rebus mathematicis explicandis seqvamur) latus cubi dati, erit

$$x^3 = 2a^3, \text{ sive}$$
$$x^4 = 2a.\ a^2.\ x, \text{ sive}$$
$$\frac{x^2}{a}.\ \frac{x^2}{a} = 2ax, \text{ unde}$$
$$x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : 2a.$$

Posito deinde $\frac{x^2}{a} = y$, unde $a : x = x : y$. erit

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

ut latus cubi qvæsiti sit prima duarum mediarum continue proportionalium inter a et 2a.

Quanquam nullam solvendi rationem ab ipso propositam habemus, optime tamen, translatione, quæ commemorata est, de problemate cubi duplicandi meritus est Hippocrates. Tametsi enim alterum illud problema circulo et linea recta geometrice solvi non potest, vel, ut more veterum geometrarum loquamur, ad problemata plana referri non potest, id quod tum non satis intellectum esse videtur; tamen studio et acumini Hippocratis tribuendum est, quod problema magis patefactnm est, ut rationibus, quæ mechanicæ vocantur, solvi posset, et via inveniretur, qua ad vere geometricam problematis solvendi rationem perveniri posset.

Ceterum, teste Proclo, hanc translationem (ἀπαγωγήν) problematis aut theorematis propositi ad aliud quoddam, quo cognito aut soluto, propositum quoque esset inventum, Hippocrates primus in disquisitionibus geometricis adhibuit, unde, ut infra explicabimus, analysis mathematica veterum originem traxit.

Procli Diadochi commentarii in librum primum Euclidis (latine editi a Barocio, Patavii 1560) lib. II Cap. 4. pag. 37.

Bossut. Gechichte der Mathematik. 1 Th. pag. 65.

Chasles. Aperçu historique sur l'orgine et le developpement des méthodes en Géométri, Bruxelles 1837. pag. 5.

Reimerus. Hist. probl. De cubi duplicatione, Göttingæ 1798. Cap. IV.

CAP. IV.

Quemadmodum problema cubi duplicandi ab oraculo Deliaco proponatur.

Problema, quum Hippocratis acumine esset translatum et postea a philosophis diligentissime tractaretur, nunc etiam multitudinis animos ad se convertisse videtur; id quod ex hoc colligere licet, quod Euripides nostrum problema in fabula tragica adhibuit. Quum enim solutio problematis duarum mediarum continue proportionalium inveniendarum a Platone (c. 390 a. Chr. n.) ejusque discipulis diligentissime investigaretur, factum est, ut etiam in vita quotidiana hujus problematis mentio interdum fieret; quod indicat celeberrimum illud oraculum Deliacum, quod Plutarchus in dialogo „*De genio Socratis*" tradit. Quum autem

arbitremur, in iis, quæ de hoc oraculo tradita sunt, interpretandis, et mathematicos et philologos errasse, fere ipsis Plutarchi verbis, quæ de hac re memoriæ prodita sunt, explicare conabimur.

Narrat enim (cap. V) Phidolaus quidam, Agesilaum, regem Lacedæmoniorum, reliquias sepulcri Alcmenæ ab ipso diruti Spartam transferri jussisse, et tabulam æneam in sepulcro inventam Memphin ad sacerdotes misisse, ut scripta interpretarentur. Postea (cap. VII) [in edit. D. Wyttenbachi Tom. III (Oxon. 1797) pag. 334]. „Simias quidam, Tabulam, inquit, istam non novi: sed Agetoridas Spartanus multis cum literis Memphin venit ad Chonuphin prophetam, quum ibi tunc una philosopharemur ego, Plato et Ellopio Peparethius: miserat autem Agetoridam rex petens a Chonophi, ut si quid scriptorum intelligeret, statim hoc interpretatum ad se remitteret. Ergo Chonuphis, quum per triduum seorsim de antiquis libris omnis generis literarum formas collegisset, rescripsit ad regem, nobisque indicavit, his literis significari, ***Musis Græcos debere certamen edere:*** esse autem literarum formas ejus grammaticæ, quam Proteo regnante Hercules Amphitrionis F. didicerit: et moneri Græcos his literis a deo, ut armis positis pacatam quietamque vitam ducant, et philosophice concertantes de jure, erudite et cum ratione inter se lites transigant. Nos et tum Chonuphis sententiam probavimus, et magis etiam, quum nobis ex Aegypto avectis et circa Cariam navigantibus occurrerunt Delii quidam, qui a Platone, utpote rerum geometricarum perito, flagitarent oraculi explicationem, quod insolens ipsis deus edidisset. Erat autem oraculi hæc sententia, *Deliis et Græcis calamitatum finem fore præsentium, si aram, quæ in Delo erat cubica, duplicarent.* Neque vero illi sensum conjectare poterant, atque circa structuram aræ ridicula passi erant. Nam unoquoque quatuor laterum duplicato, inprudentes augmentatione locum solidum octuplum effecerant, per analogiæ imperitiam, quæ longitudine duplum præbet. Platonem igitur in hujus dubitationis auxilium advocarunt*).

*) Pro verbis: Neque vero illi ——— auxilium advocarunt", quæ ex versione Henrici Stephani sampsimus, habet Wyttenbachius, quem ceterum secuti sumus; „Cujus quum sententiam assequi non possent, et in altaris structura redicule eis hoc evenisset, ut pro dupla ara, ignoratione proportionis „*quadruplam*" excitarent; Platonis opem in hac difficultate explicanda imploraverunt." Quam versionem pravam a plerisque interpretibus probatam videmus.

Ille vero Aegyptii istius recordatus, Ludi a deo Græcos dixit, qui eruditionem negligerent, eorumque insultari inscitiæ, mandarique, ut serio Geometriæ operam darent; non enim leviter aut segniter in tractandis lineis perspicacis ingenii opus esse, datis duabus lineis, aliam, quæ continente proportione inter has intercedat invenire: quæ quidem unica sit cubi duplicandi ratio, ex æquo omnibus ejus auctis dimensionibus: rem iis ab Eudoxo Cnidio, aut Helione Cyziceno confectum iri. Neque vero deum hanc aræ duplicationem requirere aut desiderare, sed universis præcipere Græcis, ut, bellis et miseriis ea comitantibus vitatis, Musis sese dedant, ac literarum et doctrinæ usu, sedatis animi turbulentis motibus, innoxie et utiliter inter se conversentur."

Significant igitur ipsius Plutarchi verba, *Platonem Aegyptii illius recordatum Deliis respondisse*; neque ulla causa est cur credamus, quod suspicantur Reimerus et Klügel [Reimerus, de cubi duplicat pag. 34. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, 1ster Theil (Leipzig 1803) in art. Deliches Aufgabe. pag. 722], ipso Platone auctore oraculum editum esse.

Porro si in memoriam revocamus, problema cubi duplicandi illo tempore vulgo cognitum fuisse et rationem ejus solvendi a philosophis jam inventam, non mirum nobis videri potest, editum esse oraculum, ad quod perficiendum non exiguum temporis spatium opus esset, adeo ut verisimile esset, finem calamitatis ante fore factum, quam ara jussu oraculi esset exstructa. Ex iis igitur quæ jam dicta sunt, nobis perspicuum videtur, errasse Schweigerum, virum rerum physicarum longe peritissimum, qui ex oraculo, quod sæpius commemoravimus, concludere vult [Schweigeri, Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen (Halle 1843) pag. 13, ubi etiam vitiose traditur, oraculum a Delphiis editum esse], studia mathematica ad mysteria veterum pertinuisse.

Quanquam ad propositum nostrum non pertinet, tamen facere non possumus, quin Plutarchi verba, quæ a plerisque*) non satis intellecta videntur, paucis illustremus. Verba sunt hæc: *ἑκάστης γὰρ τῶν τεσσάρων πλευρῶν διπλασιαζομένης, ἔλαθον τῇ αὐξήσει τόπον στερεὸν ὀκταπλάσιον ἀπεργασάμενοι, δι᾽ ἀπειρίαν ἀναλογίας, ᾗ τῷ μήκει διπλάσιον παρέχεται.*

*) Inter omnes versiones hujus loci, quas nobis ut videremus contigit, Henrici Stéphani solius non vitiosa reperitur.

Jam τέσσαρες πλευραί sunt quatuor illæ rectæ, quæ sunt bases quatuor quadratorum perpendicularium, quibus ara concluditur; quæ, si, forma solidi cubica servata, rectæ duplicantur, octupla fict. Verba ἢ τῷ μήκει ad verba τεσσάρων πλευρῶν sunt referenda. Ex hoc autem, ut nobis videtur, sententia loci satis intelligitur.

Sed ut tandem oraculum Deliacum et interpretes quum mathematicos tum philologicos relinquamus, quæ Plato ejusque discipuli de nostro problemate, quod postea *Deliacum* appellatum est, meriti sunt, seqventi capite demonstrare conabimur.

CAP. V.

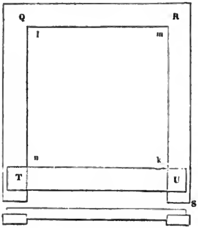
De Platonis ejusque discipulorum duas medias continue proportionales inveniendi rationibus.

Quomodo factum esset, ut Plato et qui ab eo profecti erant philosophi, in nostro problemate explorando tam diligenter versarentur, id jam supra (cap. I) disputavimus; quare nihil est, quod de ea re plura hoc loco dicantur. Hoc capite autem copiosius nobis commemorandum est, quæ solvendi rationes vel ab ipso Platone vel a discipulis et familiaribus ejus sint inventæ.

P l a t o.

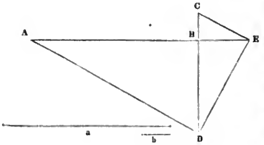
Quæ antiquissima est cubi duplicandi ratio et quidem mechanica, eam Platoni ipsi attribuit Eutocius [Comment. in Archim. lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2; in ed. Torelli (Oxon. 1798) pag. 135], qui problema, ut, datis duabus rectis, duæ mediæ continue proportionales inveniantur, a clarissimo illo philosopho ita solutum esse tradit.

Ad constructionem perficiendam instrumento opus est, quod ita est construendum:



Tres regulæ P Q, Q R et R S inter se arcte conjunguntur, ita ut ad Q et R anguli efficiantur recti; alia deinde regula mobilis T U sic transversim collocatur, ut, dum movetur, anguli ad T et U conserventur recti.

Hujus instrumenti ope inter datas a et b duæ mediæ continue proportionales ita inveniuntur: In puncto B, lineæ A B = a, erigitur perpendicularis B C = b; tum instrumentum ita collocatur, ut transeat recta l m per punctum C, et eo usque circumagitur, dum et simul movetur regula T U, donec positum est punctum m in recta A B producta, punctum k in B C producta, denique transit recta n k per punctum A. Quo facto, si sita est recta l m in C E, punctum m in E, punctum k in D et recta k n in D A, ob triangula rectangula A D E et D E C, efficietur:



$$AB : BD = BD : BE = BE : BC \text{ ɔ:}$$
$$a : BD = BD : BE = BE : b.$$

Ne forte mireris, quod ipse Plato, quum reprehenderet discipulos, qui in solutionibus mechanicis inveniendis versarentur, rationem prorsus mechanicam ad duas medias continue proportionales inveniendas adhibuerit, Reimerum*) sequentes addimus, Platonem in solutione

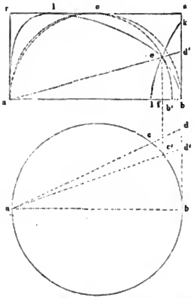
*) Vide Reimeri hist. probl. de cub. dupl. pag. 45, ubi etiam, sed ut nobis videtur nullo jure, in dubium vocatur, num solutio illa mechanica sit Platoni attribuenda; hanc rem autem copiosius disputare non sinit propositum nostrum.

sua mechanica tradenda illud forsitan spectasse, ut, quum hæ Archytæ et Menæchmi cubi duplicandi rationes, de quibus infra mentionem faciemus, in usu essent difficiliores, rationem quandam problematis solvendi ad varios vitæ communis usus aptam vulgaret.

Archytas.

Qui omnium primus ex justis geometriæ legibus rationem nostri problematis solvendi invenit traditur fuisse *Archytas*, clarissimus ille Pythagoreorum philosophus, summus imperator Tarentinorum et amicus Platonis. Ratio ejus cubi duplicandi ab Eutocio [Comment. in Archim. lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2; in ed. Torel. pag. 143] tradita, hæc est.

Fig. *a*.

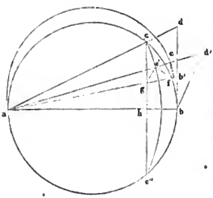


Sint datæ rectæ m et n, inter quas duæ mediæ continue proportionales inveniantur. Diametro a b = m describitur semicirculus a c b, et abscinditur chorda a c = n, quæ producta ad d tangentem in puncto b erectam secabit; tum semicirculo a c b superstruitur semicylindrus rectus, cujus sectionem perpendicularem ostendit geometrica, quæ appellatur, delineatio (Fig. *a*). Diametro vero a b, et basi semicylindri ad angulos rectos, ponitur semicirculus a o b (Fig. *a*). Hic igitur semicirculus, si manente diametri termino „a" a puncto b versus c circumagitur, superficiem cylindricam secabit, et lineam quandam curvaturæ duplicis in ipsa describet (quæ sit forma ejusmodi curvæ ostendit linea a l e b (Fig. *a*). Rursus vero, si manente diametro a b circumagitur Δ a b d, motu, qui sit illi semicirculi (a o b) circumacti contrarius, 1) efficiet conicam superficiem recta a d, 2) describet semicirculum c c' c" (Fig. *b*) punctum c, 3) et nascitur denique intersectione

semicylindri et coni linea duplicis curvaturæ kei (Fig. *a*), quæ in puncto aliqvo cum curva, in superficie cylindrica motu illius semicirculi descripta, concurret. Habeat autem, ubi hæ curvæ concurrunt, promotus semicirculus eundem situm, qualem aeb'; triangulus vero ex adverso circumactus eundem qualem abd'; punctum denique in quo concurrunt sit e (Fig. *a* et Fig. *b*). A puncto e in superficie semicylindri sito, demittitur denique perpendicularis ef, cujus terminus f, quia rectus est cylindrus, occurret peripheriam semicirculi acb. Si demum ducitur recta ef erit (Fig. b)

$$ab : ae = ae : af = af : ac$$

Fig. *b*.



Demonstratio (Fig. *b*).

Ducuntur rectæ eb', fc' et c'g, quæ omnes sitæ sunt in plano aeb'. Quoniam porro uterque semicirculus aeb' et cc'c" plano acb est perpendicularis, communis quoqve ipsorum intersectio eidem plano est ad angulos rectos; erit igitur c'g rectis af et cc" ad angulos rectos. His præmissis primum est demonstrandum

$$eb' \mathrel{\text{⧧}} c'f.$$

Est enim

$\Delta agc' \backsim \Delta gc'f$, unde

sunt

$$ag : gc = gc'' : gf$$
$$cg : c'g = c'g : gc'', \text{ unde}$$
$$ag : c'g = c'g : gf; \text{ porro est}$$
$$\angle agc' = 90^0 = \angle c'gf, \text{ ergo}$$
$$\Delta agc' \backsim \Delta gc'f.$$

$$\sphericalangle\, gfc' = \sphericalangle\, ac'g;\ \text{porro est}$$
$$\sphericalangle\, gfc' + \sphericalangle\, gc'f = 90^0\ (\text{qvia}\ \sphericalangle\, c'gf = 90^0),\ \text{unde}$$
$$\sphericalangle\, ac'g + \sphericalangle\, gc'f = \sphericalangle\, ac'f = 90^0;\ \text{atqui est}$$
$$\sphericalangle\, aob' = 90^0,\ \text{ergo}$$
$$eb' \mathbin{\#} c'f$$

Ob has parellelas efficitur

$$ab' : ae = af : ac';\ \text{et quum præterea sit}$$
$$ab' : ae = ae : af,\ \text{erit}$$
$$ab' : ae = ae : af = af : ac';$$
$$\text{atqui sunt}\ ab' = ab = m,\ \text{et}\ ac' = ac = n,\ \text{unde}$$
$$m : ae = ae : af = af : n.$$

q. e. d.

Quanquam hanc rationem problematis solvendi usui vitæ communis, quem maxime videtur spectasse Archytas, idoneam nequaquam judicare possumus, ex ea tamen elucet insignis sagacitas et sublime ingenium auctoris, quem etiam veteres ob cetera ejus inventa, ad usum vitæ communis imprimis comparata, maxima laude et eximia admiratione celebrarunt. [Horatii lib. I. Od. 28. Vitruvii lib. IX. Cap. 3].

Menœchmus.

Quam viam nobilissimus ille Tarentinus in nostro problemate solvendo ingressus erat, eam ceteri quoque philosophi a Platone profecti secuti sunt, qui omnes solutionem in curvis ex solidis sectis ortis ponebant. Inter eos autem imprimis laudandus est Menæchmus, qui, postquam ex disciplina Eudoxi in familiaritatem ipsius Platonis pervenit, primus sectiones conicas ab ipso inventas ad duas medias continue proportionales inveniendas adhibuit. Quum autem de illis sectionibus postea copiosius disputare nobis in animo sit, non est, cur hic plura dicantur. Itaque hoc loco tantummodo duo theoremata, in quibus Menæchmi solutiones positæ sunt, commemorabimus. Sunt autem theoremata hæc:

1) „Si a quolibet *parabolæ* puncto demittitur recta, ipsi axi ad angulos rectos, erit quadratum hujus æquale rectangulo, quod fit ex latere recto et ea recta, quam

ex axe verticem versus linea a puncto parabolæ demissa abscindet. Vel, ut more recentiorum loquamur,

$$y^2 = 2cx$$

ubi est c semiparameter.

2) Si ex quolibet *hyperbolæ* puncto rectæ, utrique asymptotæ parallelæ, ducuntur, æqualia sunt omnia, quæ intra hyperbolam et asymptotas constituuntur parallelogramma, quæque angulum inter assymptotas communem habent; quod, ut constat, sic recentiores exprimunt

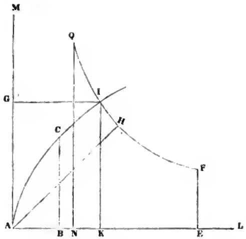
$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

ubi sunt a et b semiaxes hyperbolæ*). Quorum theorematum ope Menæchmus duas rationes duas medias continue proportionales inveniendi proposuit, alteram ope parabolæ et hyperbolæ, alteram ope duarum parabolarum; illam, ut analyseos veterum afferamus exemplum, fere verbis ipsius Eutocii trademus [Comment. in Archim. lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2; in ed. Torel. pag. 141].

Sint datæ duæ rectæ a, b. Oportet autem duas inter a, b proportionales medias invenire. Inventæ fuerint: eæque sint y et x. Exhibeatur autem recta A L positione data, eademque terminata ad punctum A: ponaturque ad id punctum ipsi x æqualis A K: et ducatur ad angulos rectos I K, eaque ipsi y æqualis fiat. Quoniam igitur tres proportionales rectæ sunt a, y, x, spatium, quod sub a, x continetur, æquale est quadrato, quod a y describitur. Quod igitur spatium continetur sub data a et x, hoc est A K, id quadrato æquale est, quod describitur a y, hoc est a I K. Itaque punctum I in parabola est per punctum A descripta. Ducantur parallelæ I G et G A. Et quoniam datum est spatium, quod sub y, x continetur; quippe æquale est illi, quod sub a, b; spatium quoque datum est, quod continetur sub G I K. Itaque punctum I in hyperbola est descripta inter asymptotas A G et A K. Datum est igitur punctum I; atque adeo etiam K.

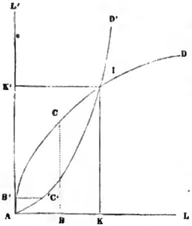
---

*) In hyperbola æquilatera, quam problemati solvendo adhibuit Menæchmus, est, ut constat, $xy = \frac{a^2}{2}$.



Componitur autem problema hoc pacto. Sint datæ quidem rectæ a et b; quæ vero positione data est A L, terminata ad punctum A; et describitur per punctum A parabola, cujus quidem axis A L; rectum vero figuræ latus a. Quæ autem ad rectos angulos ad A L ducuntur, possunt (δυνάςθωσαν) spatia, quæ ipsi a applicantur, latitudinemque habent rectas, quæ ab ipsis ad punctum A abscinduntur*). Describatur, eaque sit A I: et sit A G ad rectos angulos. Describatur porro inter assymptotas G A et A L hyperbola, a qua, si rectæ ducantur ipsis G A et A K parallelæ, spatium conficient ei æquale, quod sub a et b continetur: atque hæc quidem hyperbola parabolam secuerit. Secet in puncto I; et ducantur normales G I et I K. Quoniam igitur quadratum, quod a I K describitur, æquale est spatio, quod sub a et x continetur, ut a ad I K, ita se habet I K ad K A. Rursus quoniam spatium, quod sub a et b continetur, æquale est spatio, quod continetur sub I K A; ut a ad I K, ita se habet A K ad b. Ut autem a ad I K, ita se habet I K ad A K. Igitur etiam ut a ad I K, ita se habet I K ad A K, et A K ad b. Ponatur ipsi I K æqualis y, et ipsi A K æqualis x. Ut igitur a ad y, ita se habet y ad x, et x ad b. Igitur a, y, x, b deinceps proportionales sunt. Quas invenire oportebat.

*) Sententia hujus loci hæc est: Quæ autem recta ad angulos rectos ad A L ducitur, v. c. I K, *ejus quadratum æquale est* (δυνάςθωσαν) rectangulo, quod ipsi a applicatur, latitudinemque habet rectam, quæ ab I K ad punctum A abscinditur.



Ope duarum parabolarum se invicem secantium inter duas datas duas medias continue proportionales ita constituit Menæchmus.

Si notant y et x duas medias continue proportionales inter datas a et b, erit

$$a . y = y : x = x : b, \text{ unde}$$
$$y^2 = a x, \text{ et}$$
$$x^2 = y b.$$

Quarum æquationum altera indicat, y et x esse coordinatas parabolæ, cujus parameter est a; altera vero, x et y simul esse coordinatas parabolæ, cujus parameter est b. Problema igitur ita componitur.

Ducuntur rectæ A L et A L', se invicem ad angulos rectos secantes; tum, vertice puncto A et axe A L, constituitur parabola A D, cujus parameter est a; vertice deinde puncto A, axe vero A L', altera constituitur parabola, cujus parameter est b. Ex puncto I denique, ubi se secant parabolæ, ducuntur, axibus ad angulos rectos, rectæ I K et I K'.

Si nunc ponitur I K = y et A K = x, erit

$$a : y = y : x = x : b.$$

Cujus rei demonstratio facile elucet.

Inter discipulos Platonis, qui in nostro problemate solvendo versabantur, etiam nominandus est Eudoxus, Aeschinis filius, nobilissimus ille octaedridis auctor, qui elementa geometriæ conscripsit, et doctrinam proportionalium insigni acumine tractavit, quemadmodum doctrinam quoque solidorum multis theorematis novis et gravibus auxit, velut hoc, quamlibet pyramidem partem esse tertiam prismatis, quod eandem atque pyramis basin haberet eandemque altitudinem. De cono et cylindro, eandem altitudinem habentibus, simile theorema proposuit [Archim. in præf. lib. I de sphær. et cylindr.; in ed. Torel. pag. 64]. Ad nostrum autem problema solvendum proprias quasdam curvas Eudoxus, solida secando,

excogitavit, quarum ortus et indoles plane ignoratur, et in quibus adhibendis auctorem valde errasse Eutocius tradit [Comment. in Archim. lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2; in ed. Torel. pag. 135].

Hæc fere sunt, quæ de conatibus Platonis ejusque discipulorum, in problemate duas medias continue proportionales inveniendi, tradita sunt; quanquam non dubium est, quin conicæ illæ sectiones, a Menæchmo constitutæ, multis et variis modis ad problema solvendum adhibitæ sint. Aristæus quidem, qui quinque de conicis libros edidit (quos imprimis Euclides secutus esse dicitur), totidem de locis solidis, qui ad problema solvendum postea adhibiti sint, conscripsisse dicitur; num autem Aristæus ipse in hac re elaborarit, non constat [Pappi collectiones mathematicæ; in versione Commandini (Bononiæ 1660) pag. 7]. Ex iis, quæ jam tradita sunt, satis intelligitur ingenium insigne et sagacitas sublimis philosophorum Platonicorum, ut vel ea de causa illi conatus digni sint, qui in gratam posterorum memoriam revocentur; quod magis etiam elucet, si respiciuntur permulta non modo theoremata singula, sed etiam rationes geometricæ prorsus novæ, quæ a studiis ad problema cubi duplicandi pertinentibus originem duxerunt.

CAP. VI.

Qui fuerint geometriæ progressus, a problemate cubi duplicandi profecti.

Ut jam (cap. III) ostendimus, Hippocrates Chius, amplius L annos ante Platonem, primus docuit, quomodo transferri posset problema geometricum in aliud quoddam, quo soluto, propositum etiam solutum esset. Hoc inventum velut aditum in analysin geometricam patefecit.

Quod Hippocrates bene inceperat, id philosophi Platonici ad culmen perduxerunt, qui, quum in nostro problemate inprimis versarentur, veterum *analysin geometricam* excolebant. Ratio illa quæstiones geometricas instituendi, cujus exemplum exstat solutio prima Menæchmi in capite priore tradita, quæ, quum propositum quasi inverse solvatur, ex ἀνάπαλιν λύσις — solutio inversa — nomen traxit, ex hoc igitur constat, ut propositum, si theo-

rema est, verum esse, aut, si problema est, solutum esse statuatur, et deinde quæratur, quæ ex eo sequantur; ex inventis deinceps colligitur, donec statutum est aliquid, quod, si theorema est, utrum verum sit an falsum, si problema est, utrum solvi possit necne, dubitari non possit; et ex natura ejus, quod erit postremum inventum, intelligetur, num propositum sit verum aut solvi possit. Ex fine analyseos, qui, si de theorematis quæritur, est axioma aut theorema jam demonstratum, si de problematis, postulatum aut problema jam solutum, deducitur synthesis theorematum et constructio problematum, quæ semper cum analysi conjunctæ fuerunt. Synthesis in eo posita est, ut, ex fine exiens, viam analyseos inversam sequare, donec postremo ad propositum perveniatur. Denique veteres analysin theoreticam, qua inquiritur, num verum sit propositum, et problematicam, qua inquiritur, num fieri possit propositum, distinguebant: alteram igitur in theorematis, alteram in problematis investigandis adhibebant. [Pappi præf. in lib. VII, in edit. Command. pag. 246].

Jam veteres videbant, qui in nostro problemate solvendo diligentissime versabantur, problemata, ad quæ analysis duceret, ope rectæ et circuli omnino non geometrice solvi posse*); quare nova adjumenta esse invenienda. Ita primum factum est, ut animi philosophorum *ad curvas ex solidis sectis ortas*, converterentur, et, ut jam commemoravimus, omnibus hac in re Archytas præstitit, quem secuti sunt Menæchmus, Eudoxus, Dinostratus, reliquique ejus ætatis philosophi, qui omnes, quum in nostro problemate tum in problemate anguli trisecandi**) solvendo versantes, solutiones vere geometricas in sectio-

*) Verisimile est, Platonem hoc primum intellexisse, qui primus curvas ex solidis sectis ortas conspicatus esse videtur; in sectionibus autem investigandis non ipse operam dabat, sed studia discipulorum huc pertinentia regebat. [Reimerus, De cubi duplicatione. Cap. VI].

**) Illud quoque problema prius propositum est, quam sectiones conicæ sunt inventæ, quemadmodum etiam a philosophis Platonicis una cum nostro problemate inquirebatur. Pappus [in coll. mathem. lib. IV prop. 31—35; in vers. Command. pag. 95 et sequ.] duas tradit solvendi rationes, quæ positæ sunt in intersectione hyperbolæ et circuli.

nibus solidorum ponendas esse judicarunt; unde factum est, ut indoles illarum sectionum diligentissime inquireretur.

Inter discipulos Platonis, qui ex sectionibus solidorum optime meriti sunt, præcipue nominandi sunt Eudoxus Cnidius et Menæchmus, quos jam supra commemoravimus. Alter curvas quasdam, ex cylindro secto ortas, invenit, quarum indoles et natura ignoratur; alter, qui ad problema nostrum solvendum sectiones conicas adhibuit, primus in geometriam curvas illas introduxit, quarum investigatione mathesis postea tanta incrementa cepit. Menæchmus autem sectiones conicas non eodem modo constituit, quo Apollonius et qui eum secuti sunt mathematici. Definiebant enim philosophi illius temporis conum ita, ut dicerent, conum describi, si circumvolveretur triangulus, quum alterum eorum laterum, quæ circa angulum rectum sunt, immotum maneret. Hoc latus immotum trianguli, si est æquale alteri lateri ad triangulum rectum, conus rectangulus, sin autem minus altero illo latere, obtusiangulus, si denique majus, acutiangulus conus oriri dicebatur. Menæchmus igitur conum hoc modo constitutum plano per axem transeunte secuit; quo facto triangulum isoscelem effectum iri intellexit. Deinde alteri hujus trianguli cruri ad angulos rectos aliud posuit planum conum secans, et proprietates hujus sectionis in variis conis inquisivit. Sectio ita in cono rectangulo constituta appellata est coni rectanguli sectio (parabola); in obtusiangulo, coni obtusianguli sectio (hyperbola); in acutiangulo denique, coni acutianguli sectio (ellipsis) *). Rationem Menæchmi sectiones conicas constituendi secuti, ceteri post eum philosophi in singulis conis unam tantummodo inesse sectionem conicam judicabant, quum Apollonius (c. 200 a. Chr.) omnes illas sectiones in quolibet cono inesse statueret, prout planum secans varie esset positum [Klügel. mathematisches Wörterbuch, 3ter Th. pag. 22. Art.: Zur Geschichte der Kegelschnitte].

Quot et quales proprietates sectionum conicarum ab ipso Menæchmo inventæ et demonstratæ sint, non constat: sed ex iis, quæ supra de ejus cubi duplicandi rationibus

---

*) Nomina parabola, hyperbola, ellipsis, quæ apud Archimedem primum inveniuntur, spectant, ut constat, ad eas proprietates sectionum conicarum, quas exprimunt æquationes: $y^2 = ax$; $y^2 = ax + bx^2$; $y^2 = ax - bx^2$. Circulus inter sectiones conicas non adnumerabatur.

tradidimus, conjicere licet, eum, quanquam cum Aristæo, Euclide, Archimede ceterisque, qui de doctrina sectionum conicarum paulo post optime meriti sunt, comparari non potest, doctrinam harum sectionum non leviter perstrinxisse.

Non fieri potuit, quin philosophi, qui in sectionibus solidorum quærendis versabantur, alias quoque curvas quam sectiones conicas invenirent; et mox intellexerunt, non parum differre naturam problematum, quorum solutiones positæ essent in curvis varii generis; unde factum est, ut inveniretur doctrina *de locis geometricis*.

Definitur autem locus geometricus ita, ut sit linea, per quam construatur problema indeterminatum ɔ: quod innumerabiles solutiones admittat. [Pappus. in præf. libr. VII in vers. Command. pag. 247]. Distinguebant veteres locos geometricos ita, ut loci plani dicerentur linea recta et circulus, quum in plano orirentur, solidi autem sectiones conicæ, parabola, ellipsis et hyperbola, quum ex solidorum sectionibus oriri reperirentur. Lineares denique appellabantur quælibet lineæ neque rectæ, neque circuli, neque sectiones conicæ. [Inter locos lineares igitur adnumerabatur helix, quadratrix, conchois, cissois, curvaque illa cylindrica Archytæ, quæ jam supra commemorata est.] Hæc locorum geometricorum divisio etiam translata est ad problemata ipsa, quorum alia plana, alia solida, alia denique lineria appellata sunt.

Ex operibus Platonicorum et præcipue Alexandrinorum, qui per spatium temporis annorum fere C L post Platonem floruerunt, satis intelligitur, analysin geometricam et doctrinam de locis geometricis magnam habuisse vim ad scientiam amplificandam. Sed ne latius, quam propositum nostrum sinit, proferamur, in capite sequenti breviter modo commemorabimus, quæ omitti non poterunt, ut satis intelligatur, unde factum sit, ut nostri problematis solvendi rationes, ab Alexandrinis inventæ, longe aliam naturam et indolem haberent, quam Platonicorum.

CAP. VII.

De ceteris illorum temporum geometriæ incrementis.

Progressus geometriæ, quos in capite superiore commemoravimus, omnes facti sunt illis temporibus, de quibus hic mentionem facimus, seculis quarto et tertio a. Chr., ut ea tantummodo ejus ætatis geometriæ incrementa, quæ ex nostro problemate non proximam originem duxerunt, quæ omnia, quatenus memoria eorum ad nos pervenit, clarissimis illis viris, Euclidi (c. 300 a. Chr.), Archimedi (c. 250), Apollonioque (c. 200) debentur, in hoc capite leviter perstringemus.

Euclides, qui teste Proclo [Comment. in lib. I Euclidis Cap. IV; in vers. Barocii pag. 39] a Platonicis didicerat, Alexandriæ postea vixit et, ut constat, libros XIII [libri enim XIV & XV auctorem habent Hypsiklem, A. 150 p. C.] elementa geometriæ continentes conscripsit, ad quos componendos non modo opera et inventa majorum adhibuit, verum etiam, ut geometriam in justam disciplinæ formam redigeret, multa ab ipso inventa interposuit. In operibus ejus geometriam et analysin spectantibus, quæ adhuc exstant, agitur tantummodo de geometria plana, quæ vocatur, et stereometria, ita tamen, ut nulla de nostro problemate mentio fiat. Num in libris perditis de sectionibus conicis in problemate illo versatus sit, id non constat. In analysi geometrica excolenda diligentissime versatus, librum *„data"* inscriptum edidit, quemadmodum alium quoque librum de analysi, qui *„porismata"* inscriptus est, conscripsit, quem quanquam perditum, ex fragmentis apud Pappum commemoratis, restituit Robertus Simpson [Roberti Simpson opera quædam reliqua. Glasg. 1776].

Præterquam quod Euclides primus analysin excoluit, etiam usus est primus ea demonstrandi ratione, quæ *„reductio in absurdum"* appellatur, et in geometriam introduxit *„methodum exhaustationis"* quæ vocatur, quam postea Archimedes uberius excoluit [Chasles ap. histor. et cet. pag. 9].

Archimedes, qui apud Alexandrinos fundamentis matheseos imbutus erat, primus rationem peripheriæ et diametri circuli approximatim constituit, et in sectionibus conicis versatus, quum quadraturam parabolæ tum proprietates quasdam conoidum ex sectionibus conicis circumvolvendis ortarum invenit, quemadmodum etiam de spiralibus et helicibus bene disseruit (Bossut p. 87). Nullam autem solutionem problematis duas medias continue proportionales inveniendi exposuit, sed ubi ad nostrum problema ducitur (v. c. de sphæra et cylindro lib. II probl. 2), solutionem ejus tanquam jam cognitam non explicat.

Methodus exhaustationis Archimedis supra commemorata in eo posita erat, ut propositum, velut area curvæ, statuatur esse limes, ad quem areæ polygoni inscripti et circumscripti, quorum numerus laterum æqualis est, eo magis accedant, quo major fit numerus laterum. Differentia enim arearum hoc modo magis magisque minuitur et quasi exhauritur, unde methodus ipsa nomen traxit. [De methodo exhaustationis, quæ erat veterum analysis infinitorum, copiosius disputat Klügel in mathem. Wörterbuch, 2ter Th. Art. Exhaustationsmethode, pag. 152].

Optime igitur meritus est Archimedes, quod mathesin puram excoluit et auxit, et vel hanc ob causam dignissimus est, qui in gratam posterorum memoriam revocetur. Inprimis autem nomen Archimedis celebratum est, quod præcepta matheseos in usum vitæ communis convertere studuit, quanquam ejusmodi conatus philosopho haud satis dignos ipse judicabat. Satis notum est, quæ sint ejus hac in re merita, ut hoc loco tantummodo commemorandum sit, studio et exemplo Archimedis maxime attribuendum esse, quod mechanica in justam disciplinæ formam redigi coepta est. Hoc quo minus fieret, antea philosophorum contemptus prohibuerat, qui Platonem, quum mechanicas cubi duplicandi rationes reprehenderet, non recte intellexerant.

Apollonius Pergæus e schola Alexandrina, optime de doctrina sectionum conicarum meritus est, quam eo usque adduxit, ut ne recentiores quidem novi quidquam, quod quidem alicujus momenti esset, prius adjicere potuerint, quam inventus est calculus differentialis

et integralis, qui appellatur. Præter libros VIII de sectionibus conicis multa alia opera, analysin geometricam maxime spectantia, conscripsit, quorum tamen nullum, excepto illo quod est, de sectione rationis, ad nos pervenit. De argumento libri de sectione rationis et perditorum Apollonii operum copiosius disputatur in: „Bossut's Versuch einer allgem. Geschichte der Mathematik, pag. 131."

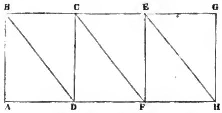
CAP. VIII.

De mechanicis Alexandrinorum rationibus duas medias continue proportionales inveniendi.

Quum plerique eorum, qui rebus mathematicis operam dabant, exemplum Archimedis sequentes, præcepta Geometrica in Astronomiam, Opticam, Mechanicam ceterasque artes, ad usum vitæ communis spectantes, conferre studerent, inter Alexandrinos Euclides et Apollonius, quos jam supra commemoravimus, fere soli cognitioni geometriæ operam dabant. Accedebat, quod Ptolemæi, quorum de literarum studiis merita eximia memoria teneri oportet, propter bella, post mortem Alexandri orta, ad investigandas veras rationes machinas bellicas constituendi magnopere adhortabantur. Jam quum ad eas machinas constituendas problema duas medias continue proportionales inveniendi, maximi momenti esset, nemini mirum videbitur, quod plures mechanicæ problematis inveniendi rationes exstant, ætate Ptolemæorum apud Alexandrinos inventæ. In his igitur solutionibus explicandis aliquantum morabimur.

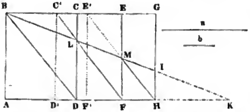
De Eratosthene.

Inter Alexandrinos, qui in nostro problemate solvendo versati sunt, primus nominandus est nobilissimus ille *Eratosthenes Cyrenaicus* (c. 220 a. Chr. n.), qui ipse in epistola ad regem Ptolemæum Euergetem, ab Eutocio integre, ut videtur, descripta, suam solvendi rationem exponit, ad quam conficiendam instrumentum constituit, quod postea in templo donum (ἀνάθημα) posuit. Hoc instrumentum, mesolabium appellatum, ita comparatum fuisse traditur.



Conjunguntur congruentes tres tabulæ rectangulatæ, A C, D E et F G, et ducuntur diagonales B D, C F et E H; tabulæ deinde ita nectuntur, ut, manente immota media D E, extremarum altera A C *supra* mediam, altera F G *infra* mediam promoveri possit.

Quod instrumentum ad nostrum problema solvendum ita adhibuit auctor:



Sint datæ rectæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales inveniantur. Si datarum major non est rectæ A B æqualis, quarta proportionalis in proportione a : b = A B : x ope constructionis geometricæ constituitur; tum longitudo ipsius x absciditur in recta H G, ut sit H I = x. Si denique rectangulæ A C et F G usque eo promoventur, donec cadunt puncta L et M, ubi secantur perpendiculares D C et D E a diagonalibus F C' et H E', in eadem recta, in qua etiam sunt puncta B et K, erit

$$AB : LD = LD : MF = MF : HI.$$

Demonstratio.

Si usque eo producentur rectæ B I et A H, donec se secant in puncto K, erunt:

$BK : LK = AK : DK$, et
$BK : LK = DK : FK$, unde
$BK : LK = AK : DK = DK : FK$. Sunt porro
$LK : MK = DK : FK$, et
$LK : MK = FK : HK$, unde
$LK : MK = DK : FK = FK : HK$; atqui erant
$DK : FK = AK : DK$, unde
$AK : DK = DK : FK = FK : HK$; atqui sunt
$AK : DK = AB : LD$
$DK : FK = LD : MF$
$FK : HK = MF : HI$, unde
$AB : LD = LD : MF = MF : HI$.

q. e. d.

Sunt igitur L D et M F mediæ continue proportionales propositæ, si sint A B = a, et I H = b; sin minus, deinceps geometrice constituuntur quartæ proportionales in proportionibus

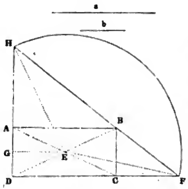
$$\begin{array}{l} AB : LD = a : p \\ AB : MF = a : q; \\ \text{et quum porro sint } AB : HI = a : b, \text{ erunt} \\ \hline p : q = LD : MF \\ q : b = MF : HI, \text{ unde} \\ \hline a : p = p : q = q : b. \end{array}$$

Facile denique intelligitur, non solum duas, sed etiam quotlibet medias continue proportionales, mesolabio Eratosthenis constitui posse, si modo augetur numerus tabularum.

Hanc solvendi rationem, quæ nihil cum ceteris veterum constructionibus commune haberet, tanquam ad usum aptissimam auctor comparavit, et ea de causa summa gloria et eximia admiratione apud veteres floruit. Quod tamen non prohibuit, quo minus jactantia et ostentatio ejus et a veteribus et a recentioribus, jure, ut nobis quidem videtur, acerbissime reprehenderetur. [Conf. Eutocii comment. in lib. II Archimed de sphæra et cylindro prop. 2 (in editione Torelli pag. 144). Pappi, Collect. mathem. lib. III propos. 5. (in vers. Command. pag. 8.)]

De Apollonio, Herone, Philone.

Horum primum jam supra commemoravimus; omnes, eodem fere tempore viventes, mechanicas nostri problematis solvendi rationes docuerunt; ipsæ autem solutiones in eo tantummodo differunt, quod opera mechanica, quæ ad duas medias continue proportionales inveniendas adhibita sunt, non eodem modo perficiebantur, quum tres illi auctores in eo consentirent, quod solutionem in proprietate punctorum, intersectione circuli et hyperbolæ ortorum, ponebant. Traditum est [Pappi coll. mathem. lib. III. prop. IV (in vers. Command. pag. 7)] Apollonium etiam geometricam problematis solvendi rationem edidisse, quæ tamen intercidit; solutio autem scriptoris illius mechanica hæc est. [Eutocii comment. ad Archim, lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2 (in edit. Torel. pag. 137)].



Datæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales sunt inveniendæ, angulum rectum ad punctum A comprehendentes describuntur, est igitur A B = a et A D = b. Tum conficitur rect. A B C D, et describitur diagonalis D B, quæ in puncto E bissecatur. Centro puncto E describitur circulus, productas rectas D A et D C ita secans, ut puncta H, B et F in directo jaceant, id quod fiet, si regula, rectas H D et D F secans, usque eo movebitur circa punctum B, donec æquales factæ erunt, quæ a puncto E ad H et F ducuntur rectæ. Si denique ducitur recta H B F, erit

$$a : AH = AH : CF = CF : b$$

(Demonstratio videatur infra).

Mechanicam nostri problematis solvendi rationem, fere eandem atque Apollonii, ab Herone Alexandrino*) inventam, explicat ipse auctor in libro βελοποιητικῶν [Thev. vet. mathemat. opera (Parisiis 1693) pag. 143], quam etiam commemorant Pappus [collect. mathem. libr. III prop. 5 (in vers. Commandini pag. 9)] et Eutocius [Comment. ad Archim. de sphæra et cylindro, lib. II prop. 2 (in editione Torelli pag. 136)].

Solutio autem Heronis hæc est:

Datæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales sunt inveniendæ, angulum rectum ad punctum A comprehendentes describuntur; est igitur A B = a et A D = b. Tum conficitur rect. A B C D, et describitur diagonalis D B, quæ in puncto E bissecatur. Regula deinde ad punctum B applicata usque eo movetur, donec productæ rectæ D A et D C ab ea ita secantur, ut fiat E H = E F. Si denique ducitur recta H B F, erit

$$a : AH = AH : CF = CF : b.$$

*) De vita et operibus Heronis, videatur Reimerus Cap. XIV.

Demonstratio*).

Si ducitur $EG \perp DC$, ut fiat $AG = GD$, erunt

$$GH = DH - \tfrac{1}{2} AD, \text{ et}$$

$$GH = AH + \tfrac{1}{2} AD, \text{ unde}$$

$$\overline{GH}^2 = DH \cdot AH + \overline{AG}^2, \text{ et porro}$$

$$\overline{GH}^2 + \overline{GE}^2 = DH \cdot AH + \overline{AG}^2 + \overline{GE}^2;$$

atqui sunt $\overline{GH}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{EH}^2$; $\overline{AG}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{AE}^2$, unde

$$\overline{EH}^2 = DH \cdot AH + \overline{AE}^2.$$

Eodem modo demonstratur

$$\overline{EF}^2 = DF \cdot CF + \overline{EC}^2;$$

atqui sunt

$$EF = EH; \text{ et } AE = EC; \text{ ergo}$$

$$DH \cdot AH = DF \cdot CF, \text{ unde}$$

$$DF : DH = AH : CF;$$

atqui sunt

$$DF : DH = AB : AH$$

$$DF : DH = CF : BC, \text{ ergo}$$

$$AB : AH = AH : CF = CF : BC, \text{ id est}$$

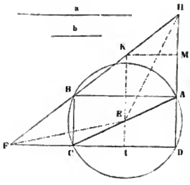
$$a : AH = AH : CF = CF : b$$

q. e. d.

Etiam Philo Byzantinus**), qui ob scientiam rerum mechanicarum apud veteres magno in honore erat, cujus autem opera, libro quarto et quinto exceptis, interciderunt, in libro quarto, βηλοποιικα inscripto [Thev. vet. mathemat. opera (Parisiis 1693) pag. 52], mechanicam quandam rationem duas medias continue proportionales inveniendi, a se inventam, enarrat; demonstratio autem, quæ in libro primo, qui non exstat, explicata fuerat, illo loco non tradit, quare Eutocium [comment. ad Archim. lib. II de sphær. et cylindr. prop. 2 (in edit. Torrel.) pag. 136] sequentes illam Philonis solutionem exponere conabimur.

*) Hæc demonstratio pertinet etiam ad solutionem Apollonii supra traditam.

**) Non est, ut vult Reimerus (pag. 107), ille Philo Architectus, qui tempore Demetrii Phalerei (circ. 300 ante Chr.) floruit.



Datæ a et b, inter quas duæ mediæ continuæ proportionales sunt inveniendæ, angulum rectum ad punctum A comprehendentes describuntur; est igitur AB = a et AD = b. Tum conficitur rect. ABCD, et describitur diagonalis A C, quæ in puncto E bissecatur. Centro puncto E, radio vero E A, describitur circulus, qui per puncta A, B, C et D transibit. Regula deinde ad punctum B applicata, et semicirculum ABC secans, usque eo movetur, donec productæ rectæ D A et D C ita secantur, ut fiat HK = BF. Si denique ducitur recta HKBF, erit

a : AH = AH : CF = CF = b.

Demonstratio.

FD : FK = BF : FC
HB : HD = AH : HK; atqui sunt
HB = FK, et BF = HK, unde

FD : HD = AH : FC; sunt porro
FD : HD = AB : AH = FC : CB, ergo

AB : AH = AH : FC = FC : CB, id est
a : AH = AH : FC = FC : b.
q. e. d.

Facile intelligitur, rectam HE, si constituitur HK = BF, æqualem esse rectæ EF, ut ratio Philonis problematis nostri solvendi, ab illis Apollonii et Heronis prorsus non differat. Quum porro puncta K et B sita sint in hyperbola æquilatera, cujus assymptotæ sunt HD et DF (id quod facile demonstrari potest*) jure fortasse suspicari licet, tres

*) Sunt enim: AH : MH = BH : KH, et
IF : CF = KF : BF; atqui sunt
BH = KF, et KH = BF, unde

illas mechanicas nostri problematis solvendi rationes, quas, ut mira sane earum affinitas eo magis appareret, verbis fere iisdem exponere conati sumus, ex illa vere geometrica, ab Apollonio inventa, ratione originem duxisse.

Hæc fere sunt, quæ de Alexandrinorum mechanicis nostri problematis solvendi rationibus tradunt historiæ matheseos scriptores, nec ullum matheseos puræ incrementum ab illis studiis profectum esse accepimus.

CAP. IX.

De rationibus geometricis duas medias continue proportionales inveniendi, in aliis curvis atque sectionibus conicis positis.

Jam supra (c. VI) commemoravimus, problemata geometrica a veteribus in plana, solida lineariaque divisa esse, prout ad ea solvenda aut recta cum circulo, aut conicæ sectiones, aut curvæ quædam aliæ adhiberentur. Unde factum est, ut etiam quæreretur, utrum nostrum problema ad plana, an ad solida, an ad linearia problemata esset referendum. Rationes duas medias continue proportionales inveniendi, quæ in locis planis essent positæ, necessario mechanicas esse, jam Plato intellexit, quare etiam discipulos et familiares adhortabatur, ut curvas, ex solidis sectis ortas, diligentissime exquirerent, et supra commemora-

---

$AH : MH = IF : CF$; præterea sunt
$KI : BC = IF : CF$
$AB : MK = AH : MH$, unde

$AB : MK = KI : BC$, sive
$DC : DI = KI : BC$, unde

$DC \,.\, BC = DI \,.\, KI$, quæ æquatio indicat, puncta K et B sita esse in hyperbola.

vimus, quæ nostri problematis solvendi rationes studiis et industria Platonicorum essent inventæ. Ex solutionibus Platonicorum, quæ adhuc exstant, sola Archytæ in locis linearibus posita est; dubitari autem nequit, quin plures illius ætatis philosophi, velut Eudoxus et Aristæus, curvas, ex aliis solidis quam cono secto ortas, ad problema solvendum adhibuerint.

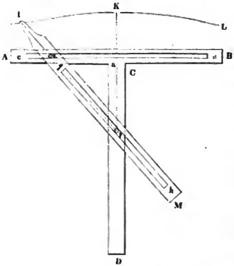
Archytæ quidem solvendi ratio facilius cogitari quam re vera perfici potest. Itaque non mirandum est, quod Alexandrini, qui in nostro problemate tractando usum tantummodo respicerent, nullam in locis linearibus positam solutionem exposuerunt.

Sine dubio autem iisdem fere temporibus, quibus florebant Alexandrini, Eratosthenes, Apollonius, Hero, Philo, duo alii mathematici, Nicomedes et Diocles, qui, ubi nati sint aut ubi vixerint, prorsus ignoratur, problematis nostri solvendi rationes, in curvis quibusdam a se ipsis inventis positas, proposuerunt. Jam quæ sint merita illorum virorum de nostro problemate, et quæ sit natura illarum curvarum ab illis constitutarum copiosius explicare conabimur.

Nicomedes.

Quod ad tempus attinet, quo vixerit auctor notissimæ illius curvæ, quæ *conchois* appellatur, hoc unum statui potest, eum post Eratosthenem, sed ante Geminum (a. 70 a. Chr.) floruisse [Reimerus, De cub. duplic. pag. 161], et, si ex nomine ejus conjicere licet, patriam habuit Mysiam aut Bithyniam. Rationem ejus problematis solvendi et Pappus et Eutocius commemorant [Pappi coll. mathem. lib. IV, prop. 22 (in vers. Command. pag. 86). Eutocii comment. ad Archim. de sphær. et cylindr. lib. II prop. 2 (in edit. Torel. pag. 147)], ut dubitari non possit, quin solutio problematis, ope conchoidis confecta, Nicomedi sit attribuenda. Prius autem quam ad ipsam ejus solvendi rationem accedimus, instrumentum, quod Nicomedes constituit, et curvam ope illius descriptam accuratius illustrare conabimur.

Tradit Eutocius instrumentum ita constitutum fuisse.



Duæ regulæ AB et CD ad angulos rectos inter se compactæ conjunguntur. In Regula AB inciditur rima, qualis c d, et in puncto p, in linea media (a p) regulæ C D sito, infigitur clavus cylindricus. Tum regula I M, cui clavus cylindricus in puncto E infixus et rima g h insecta est, ita collocatur, ut clavus E in rima c d promoveri et circumagi possit, dum simul, ob rimam g h, movetur regula I M circa clavum cylindricum p.

Sin autem eo modo movebitur regula I M, describet stylus, in puncto I infixus, curvam, qualis est I K L, quæ est *conchois* veterum. Punctum p vocatur *polus*, et recta I E, quæ, dum movetur regula, eandem semper servat longitudinem, *intervallum* curvæ.

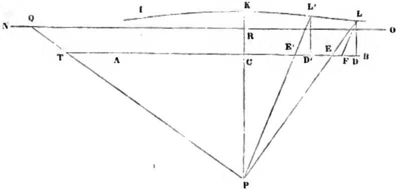
Non constat, quot et quales proprietates hujus curvæ ab ipso Nicomede sint inventæ; quæ autem ad nostrum problema solvendum pertinent, Eutocio auctore, hæc sunt:

1) *Conchois IKL ad rectam AB magis magisque accedit,* id quod inde sequitur, quod perpendiculares, quales L′D′ et LD, (vid. fig. pag. 34) eo magis decrescunt, quo magis distant a recta KC; sunt enim

$$\angle BEP > \angle BE'P, \text{ unde}$$
$$\angle BEL < \angle BE'L', \text{ unde rursus}$$
$$\angle L > \angle L'.$$

Si igitur describetur $\angle DLF = \angle D'L'E'$, incidet recta L F intra rectam L E. Tum erit, ob triangulos similes F L D et E′ L′ D′,

$$
\begin{array}{l}
E'L' : FL = L'D' : LD;\ \text{atqui est} \\
\quad E'L' = EL,\ \text{ergo} \\
\hline
EL : FL = L'D' : LD;\ \text{et quum porro sit} \\
\quad EL > FL,\ \text{est} \\
\hline
L'D' > LD.
\end{array}
$$



2) *Quælibet recta, inter lineam A B et conchoidem I K L posita, ab ipsa curva secatur,* id quod valebit de quavis recta, inter curvam et rectam A B posita, si modo demonstrari poterit, rectam, ipsi A B parallelam, (qualem N O) satis productam a conchoide IKL secari. Est igitur quærendum, num punctum quoddam rectæ N O ita situm sit, ut per illud transeat curva producta I K L, et in hunc finem constructione geometrica quarta quæritur proportionalis in proportione:

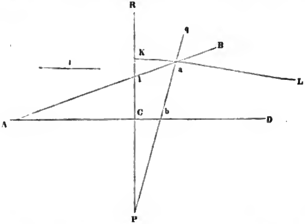
$$CR : RP = CK : x;$$

quum autem C R $<$ C K, erit etiam R P $<$ x, ut circulus, radio x descriptus, in puncto quodam secet rectam N O. Sit illud punctum Q, ut sit $QP = x$; erit igitur

$$
\begin{array}{l}
CR : RP = CK : PQ;\ \text{atqui est in}\ \triangle\ QRP \\
CR : RP = QT : PQ,\ \text{unde} \\
\hline
CK : PQ = QT : PQ,\ \text{unde denique} \\
\hline
\quad CK = QT;
\end{array}
$$

id quod significat, punctum Q, in recta N O positum, simul esse punctum conchoidis productæ.

Duobus illis theorematis demonstratis, ope conchoidis perfacile solvitur hoc problema, ut



Dato angulo A, punctoque P extra ipsum, ducatur recta P q, ita, ut sit a b æqualis datæ l.

Solutio.

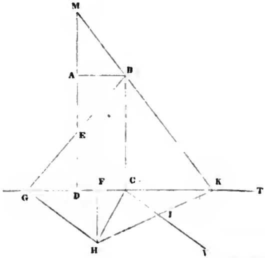
A puncto P constituitur, ipsi A D ad angulos rectos, recta R P; abscinditur C K æqualis datæ l. Tum, polo puncto P intervallo autem recta CK, describitur conchois, quæ in puncto „a" secabit rectam AD. Si denique per punctum „a" ducitur recta P q, erit, ob naturam conchoidis,

$$a b = K C = l.$$

Quibus præmissis, ipsam rationem Nicomedis duas medias continue proportionales inveniendi jam explicare conabimur.

Datæ rectæ a et b (vid. fig. pag. 36), inter quas duæ mediæ continue proportionales sunt inveniendæ, angulum rectum inter se comprehendentes describuntur; sit igitur BC = a et AB = b. Confecto rectangulo ABCD, bissecantur AD et DC, ut sit AE = ED, et DF = FC, et ducitur recta B E G (quo facto erit G D = A B = D C). Tum demissa a puncto F perpendiculari FH, describitur recta CH = AE = $^1/_2$a, et, lineæ GH parallela, ducitur recta CV. Producta deinde recta D C, ope conchoidis per punctum H ita constituitur recta, crura C V et C T secans, ut sit I K = $^1/_2$ a. Denique, si ducitur recta K B M, quæ ipsam D A productam in puncto M secat, erit

$$B C : C K = C K : M A = M A : A B.$$



Demonstratio.

$FK = CK + \frac{1}{2} DC,$

$FK = DK - \frac{1}{2} DC,$ unde

$\overline{FK}^2 = DK \cdot CK + \overline{\frac{1}{2} DC}^2,$ ergo

$\overline{FK}^2 + \overline{FH}^2 = DK \cdot CK + \overline{FC}^2 + \overline{FH}^2,$ unde

$\overline{HK}^2 = DK \cdot CK + \overline{HC}^2;$

similiter demonstrari potest

$\overline{ME}^2 = DM \cdot MA + \overline{AE}^2;$ atqui est

$HK = ME$, id quod ita demonstratur

$MA : AD = MB : BK = DC : CK,$ unde

$MA : \frac{1}{2} AD = 2DC : CK,$ id est

$MA : AE = GC : CK$

$GC : CK = HI : IK,$ ergo

$MA : AE = HI : IK,$ unde

$ME : AE = HK : IK;$ atqui est

$\frac{1}{2} a = AE = IK,$ ergo

$HK = ME,$

ergo etiam

$\overline{HK}^2 = \overline{ME}^2,$ unde

$DK \cdot CK = DM \cdot MA,$ ergo

$DM : DK = CK : MA;$ atqui sunt

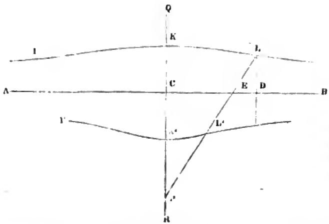
$DM : DK = BC : CK,$ et

$BC : CK = MA : AB,$ ergo

$BC : CK = CK : MA = MA : AB.$

q. e. d.

Quo magis eluceat, veram esse comparationem analyseos veterum et recentiorum, quam ad finem hujus libelli instituere cogitamus, et ut hoc tanquam exemplum habeamus ad quæstiones, quas alio tempore de institutione facere nobis in animo est, in curva illa celeberrima Nicomedis, ope analyseos recentioris, accuratius investiganda aliquantum morari, haud inutile esse nobis videtur.



Ex constructione conchoidis, quæ jam commemorata est, perfacile eruitur æquatio hujus curvæ. Sit enim recta AB axis, et punctum C initium coordinatarum; sint porro coordinatæ inter se ad angulos rectos; notet denique a rectam CK, et b rectam CP. Quibus positis, si ducuntur rectæ LD et LP, erit

$$x = CD = CE + ED.$$

Quum autem sint $ED = \sqrt{a^2 - y^2}$, et (ob proportionem $\frac{CE}{b} = \frac{ED}{y}$) $CE = \frac{b\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$,

emerget hæc æquatio $x = \pm \frac{b + y}{y} . \sqrt{a^2 - y^2}$, unde $\qquad (\alpha)$

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0 \qquad (\beta).$$

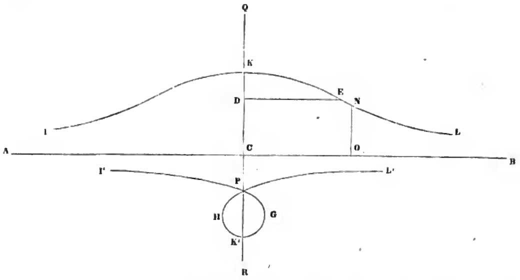
1) Primum intelligitur, æquationem (α), valoribus permagnis ipsius x; magis magisque congruere cum æquatione $xy = ab$, ut rami conchoidis, quo magis rectæ AB appropinquant, eo magis cum hyperbola, cnjus asymptotæ sunt AB et QR, in unam et eandem curvam congruant.

2) Indicat æquatio (β): *a*) Partes æquales curvæ sitas esse utrinque rectæ QR. *b*) Ramum curvæ etiam infra rectam AB esse extensum; significant enim signa terminorum, æquationem (β) unam habere radicem positivam, et unam saltem negativam. (Constituitur hic ramus inferior, qui appellatur, I'K'L', si abscinditur KC = KC', L'E' = LE, et cet.

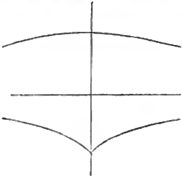
De ceteris duabus radicibus æquationis (β), utrum sint negativæ an imaginariæ, positum est in natura quantorum a, b, x. Si autem generatim est investigandum, quibus valoribus illorum quantorum radices commemoratæ sint negativæ, et quibus sint imaginariæ, solvenda est æquatio (β) ratione habita ipsius y. Quod, quum sine difficultate calculi fieri non possit, commutantur in æquatione (α) cordinatæ, quo facto abibit æquatio (α) in hanc:

$$y = \pm \frac{b + x}{x} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (\gamma)$$

Indicat hæc æquatio, si attribuuntur ipsi x valores positivi, *a*) Partes æquales curvæ non sitas esse utrinque rectæ AB; *b*) Continuum esse curvæ ramum IKL; *c*) Rectam AB esse asymptotam conchoidis, id quod etiam indicat æquatio (α).



2) Si vero ipsi x valores attribuuntur negativi, tres occurrunt casus, prout est b ≺ a, aut b ≻ a, aut denique b = a, et æquatione (γ) considerata intelligitur: *a*) Posito b ≺ a, clausam curvæ partem sitam esse inter puncta P et K', ubi curva cum axe QR concurrit, ramos vero PI' et PL' asymptotam habere rectam AB, id quod etiam apparet, si ex lege, quæ supra commemorata est, posito b ≺ a, constituitur ramus inferior conchoidis: *b*) Posito b ≻ a, partem clausam curvæ, DHK'G, contrahi in punctum P, quod æque ad curvam pertinet (vid. fig. pag. 37). *c*) Posito denique a = b, puncta P et K' in unum congruere; quæ sit forma curvæ, repræsentat hæc figura:



Not. Æquatio (β), posito $x = 0$, in hanc abiens:
$0 = y^4 + 2by^3 + (b^2 - a^2)\,y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = (y + a)\,(y - a)\,(y + b)^2$,
indicat, P esse punctum duplex.
Si in eadem æquatione insuper ponitur $a = b$, efficietur
$0 = y^4 + 2ay^3 - 2a^3y - a^4 = (y + a)^3\,(y - a)$,
quæ æquatio indicat, P ita esse punctum triplex.

Coefficientem differentialem 1^{mi}ord, ex æquatione (γ) erutum,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2b + x^3}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

contemplando, intelligimus; *a*) Tangentes in puntis K et K′ rectæ QR esse ad angulos rectos. *b*) Rectam AB esse asymptotam. *c*) Nullo valore positivo ipsius x constitui posse tangentem rectæ QR ad angulos rectos. *d*) Posito in æquatione (γ) $x = -\sqrt[3]{a^2b}$, y esse ordinatam curvæ puncti, ad quod tangens rectæ QR sit parallela. Posito autem $x = -\sqrt[3]{a^2b}$, abibit æquatio (η) in hanc:

$$y = \pm\frac{b - \sqrt[3]{a^2b}}{-\sqrt[3]{a^2b}}\sqrt{a^2 - (a^2b)^{2/3}},$$

quæ æquatio indicat, curvam nullum habere punctum maximi, nisi ipso b major est a, id quod apte cum iis, quæ supra explicata sunt, conveniunt.

Coefficientem differentialem II^{di}ord, ex æquatione (α) erutum

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y^3\,(2a^2b - 3by^2 - y^3)}{(a^2b + y^2)^3}$$

contemplando, intelligimus; *a*) Curvam in punctis K et K′ concavam, in puncto P autem convexam esse axem AB versus. *b*) Radices æquationis,

$$y^3 + 3by^2 - 2a^2b = 0, \qquad (\eta)$$

ordinatas punctorum inflexorum indicare posse.

Hæc æquatio soluta ostendit, tres omnes radices non esse reales, nisi est $2\,b^2 > a^2$, quod quum accidere possit, sive statuitur $a \leqq b$ sive $a > b$, ad rem accuratius investigandam ponemus in æqvatione (η) $y = v - a$, qvo facto usque eo movebitur axis abscissarum, ut, ipsi AB parallela, per punctum K′ transeat, et abibit æquatio (η) in hanc:

$$v^3 - 3(a - b)v^2 + 3a(a - 2b)v - a^2(a - b) = 0 \qquad (\varkappa)$$

1) Posito primum $a < b$, erunt in æquatione ($\varkappa$) signa terminorum $+ + - +$; id quod indicat, duas in ea inesse radices positivas et unam negativam. Duæ radices positivæ, quarum altera est $> a$ et $< 2\,a$, altera vero > 0 et $< a$, sunt ordinatæ punctorum inflexorum conchoidis, alterius in ramo superiore et alterius in ramo inferiore positi. Radix negativa, quum non sit $b - a$, ordinatam conchoidis indicare nequit. 2) Posito deinde $a = b$, abibit æquatio ($\varkappa$) in $v^3 - 3a^2\,v = 0$, cujus æquationis radices, $v = 0$ et $v = -a\sqrt{3}$, non sunt ordinatæ conchoidis; radix vero, $v = +a\sqrt{3}$, indicat ordinatam puncti inflexi in conchoide superiore siti.

3) Posito denique $a > b$, duo occurrunt casus, prout statuitur $a^2 > 2b^2$ vel $a^2 < 2b^2$; in priore casu in æquatione (η) non nisi una inest radix realis; in posteriore casu indicant signa terminorum æquationis ($\varkappa$), non nisi unam in ea inesse radicem positivam, et duas negativas aut imaginarias. Radix positiva, quum sit $< 2a$ et $> a$, indicat ordinatam puncti inflexi in conchoide superiore siti; duæ reliqvæ radices, sive sunt negativæ sive imaginariæ, non sunt ordinatæ conchoidis.

Not. Si est $a^2 > 2b^3$, erit radix realis æquationis

$$y = \sqrt[3]{-b\,[b^2 - a^2 - a\sqrt{a^2 - 2b^2}]} + \sqrt[3]{-b\,[b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - 2b^2}]} - b;$$

duæ reliquæ radices sunt imaginariæ. Sin autem est $a^2 < 2b^2$, tres radices reales ita exprimi possunt.

$$1)\quad y = \left[2\cos\frac{\text{arc}\,(\cos = \frac{a^2}{b^2} - 1)}{3} - 1\right]b$$

$$2)\quad y = \left[2\cos\frac{2\pi + \text{arc}\,(\cos = \frac{a^2}{b^2} - 1)}{3} - 1\right]b$$

$$3)\quad y = \left[2\cos\frac{4\pi + \text{arc}\,(\cos = \frac{a^2}{b^2} - 1)}{3} - 1\right]b$$

In quibus formulis sumendus est arc $(\cos = \frac{a^2}{b^2} - 1)$ in quadrante primo aut secundo.

Quarum expresionum prima, posito $a \gtreqless b$, et tertia, posito $a < b$, indicant ordinatas conchoidis; secunda autem, posito $a \gtreqless b$, et tertia, posito $a \geq b$, ordinatas conchoidis indicare non possunt.

Ex formulis satis cognitis perfacile constituuntur tangens, subtangens, normalis et subnormalis conchoidis; quum autem illæ lineæ nullam præbeant proprietatem singularem, non est, cur diutius in iis moremur.

De rectificatione arcus conchoidis, ad quam investigandam, quum ex functionibus ellipticis, quæ vocantur, pendeat, disquisitiones longiores opus erant, alio tempore disputare nobis in animo est.

Si notat $\mathfrak{A}$ aream segmenti conchoidis KDE (vid. fig. sup. pag. 38), et si est QR axis abscissarum, erit

$$d\mathfrak{A} = -\frac{b + x}{x}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx, \text{ unde, integrando:}$$

$$\mathfrak{A} = ab\,.\,\log\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + \tfrac{1}{2}\left[a^2.\,\text{arc}\,(\cos = \frac{x}{a}) - (2b\quad x)\sqrt{a^2 - x^2}\right]^{*)}.$$

*) Notat „log“ logarithmum naturalem.

Ex qua formula, cujus ope area segmenti conchodidei cujuslibet perfacile invenitur, apparet, posito $x = o$, fore $\mathfrak{A} = \infty$.

Not. 1. De conchoide Nicomedea, quam Vignola et Blondel etiam in architectura adhibuerunt, plura disputari, quum non sinat propositum, hoc unum addimus: Volumen conoidis conchoidalis ab architecto quodam militari, Müller, Batavo (1784), ad volumen orcarum inveniendum, nullo autem prospero successu, esse adhibitum*) [Klugel. Mathem. Wörterb. 1ster Th. pag. 539.]

Not. 2. Quemadmodum, ut facile intelligitur, describitur conchois Nicomedea, si, diametro quadam circuli per rectam AB (Fig. v. pag. 37) progrediente, a puncto P rectæ per centrum circuli ducuntur (puncta enim conchoidis indicabuntur punctis, in quibus illæ rectæ cum peripheria circuli concurrunt); sic etiam, si axis, aut ellipseos aut parabolæ aut hyperbolæ, rectam AB sive curvam quamvis secutus promovetur, describi possunt curvæ conchoidales. De his autem curvis compluribus, ne breviter qnidem hoc loco disputari, natura hujus libelli patitur.

Diocles.

Quibus floruerit temporibus ille auctor curvæ celeberrimæ cissoidis, (ita appellata ex κισσος — hedera —, quia veteres formam hujus curvæ cum folio hederæ comparabant) testimoniis veterum auctorum fere penitus deficientibus, certo non constat. Historiæ matheseos scriptorum plerique, eum quinto demum post Christum natum seculo vixisse statuunt; ostendit autem Reimerus [De cubi duplicat. pag. 174] hano sententiam non esse veram, et Dioclem ad primum vel potius ad secundum ante Christum natum seculum esse referendum. Quæ sit indoles singularis curvæ ab eo inventæ, et quæ sit ratio ejus nostri problematis solvendi, Eutocium [Comment. in Archim. de sphær. et cylindr. lib. II prop. 2 (in edit. Torel.) pag. 139] sequentes, paulo accuratius explicare conabimur.

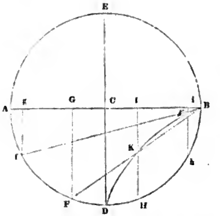
---

*) Si notat V volumen conoidis conchoidalis, quæ oritur, si, axe AB (Fig. v. pag. 38) manente, circumvolvitur rami pars KN, inter $KC = a$ et $NO = y$, erit

$$dV = -\frac{\pi(a^2 b + y^2)dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$ unde, integrando:

$$V = \pi a^2 b \text{ arc } (\cos = \frac{y}{a}) + \tfrac{1}{3}\pi (2a^2 + y^2)\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Quæ expressio, quum, posito $y = 0$, abeat in $\pi a^2 (\tfrac{1}{2}\pi b + \tfrac{2}{3} a)$, indicat, finitum esse volumen conoidis conchoidalis, quæ oritur, si circumvolvitur ramus KL conchoidis superioris, in infinitum productus.



Quum in circulo, descriptis ad angulos rectos diametris AB et DE, ex utraque parte puncti D abscinduntur æquales FD et DH, et a punctis H et F demittuntur perpendiculares, FG et HI, ducta recta FB erit:

$$AI : IH = IH : IB = IB : IK.$$

Sunt enim

$GB : GF = IB : IK$, et

$GB : GF = GF : GA$, unde

$GB : GF = GF : GA = IB : IK$; quum autem sint,

$GB = AI$; $GF = IH$; et $GA = IB$, erit

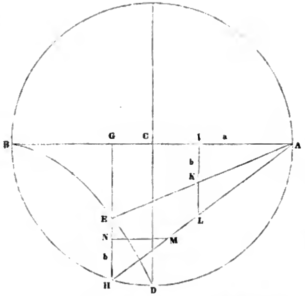
$$AI : IH = IH : IB = IB : IK.$$

Si abscinditur $fD = hD$, et constituuntur perpendiculares fg et hi, et denique ducitur recta fB, simili modo demonstrari potest

$$Ai : ih = ih : iB = iB : iK.$$

Curva igitur, in qua sita sunt puncta K et k, ex cujus reliquis punctis quotlibet secundum ea, quæ jam dicta sunt, constitui possunt, quamlibet semichordam, diametro perpendicularem ita secat, ut fiant ipsa semichorda et pars minor diametri mediæ continue proportionales inter partem majorem diametri et eam partem semichordæ, quæ diametro proxima est.

Curvam DKkB, quæ est cissois Dioclis, ad nostrum problema solvendum ita adhibitam invenimus:



Sint datæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales inveniantur. In circulo, cujus radius tamen longior est sumendus quam datarum major, constituitur, diametro AB perpendicularis, radius CD, et describitur arcus cissoideus DEB; abscinditur deinde AI = a, et erigitur perpendicularis IK = b. Si denique ducitur recta AKE, et demittitur perpendicularis HEG, erit ex natura cissoidis.

$$AG : GH = GH : GB = GB : GE.$$

Denique constructione geometrica constituuntur deinceps quartæ proportionales in proportionibus

$$AG : GH = a : p$$
$$GH : GB = p : q, \text{ unde}$$

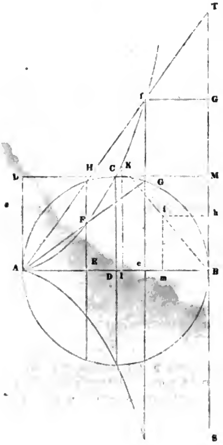
$$GB : AG = q : a; \text{ et quum sit}$$
$$AG : GE = a : b, \text{ erit etiam}$$

$$GB : GE = q : b; \text{ efficitur igitur}$$
$$a : p = p : q = q : b.$$

Not. Constructio geometrica, qua constituuntur rectæ p et q facillime conficitur, si, ducta recta AH, et producta perpendiculari IK usque ad L, abscinditur HN = b, et denique erigitur recta MN ipsi HG ad angulos rectos; erit enim IL = p, et MN = q, cujus rei demonstratio facile elucet.

Commemorat Proclus [comment. in lib. I Euclidis (in vers. Barocii) pag. 31] cissoidem, quam etiam ad angulum trisecandum adhibuit ipse auctor, tanquam exemplum curvæ

angulum efficientis (ramum enim cissoidis, in quadrante ACD positum, cum ramo DEB unam et eandem efficere curvam, jam intellexerunt veteres). Non tamen invenimus, veteres naturam et indolem hujus curvæ altius investigasse; quum vero hæc curva permultas habeat proprietates singulares, in natura cissoidis paulo accuratius investiganda, hoc loco aliquamdiu morabimur.



Sit AB axis abscissarum; et punctum A initium coordinatarum; sint porro, more solito, $AE = x$ et $EF = y$; si denique ponitur $AB = a$, efficietur (ob proportionem

$$x : y = Ae : eG)$$

$$x^2 = y^2 \frac{\overline{Ae}^2}{\overline{eG}^2};$$

atqui sunt

$\overline{Ae}^2 = (a-x)^2$ et $\overline{eG}^2 = (a-x)\,x$, unde

$$x^2 = \frac{y^2(a-x)}{x}, \text{ unde porro} \qquad (\alpha)$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} \qquad (\beta)$$

Indicat æquatio (β) *1*) Partes æquales curvæ sitas esse ex utraque parte rectæ AB. *2*) Curvam in initio coordinatarum concurrere cum axe. *3*) Rectam, in puncto B perpendicularem, esse asymptotam. *4*) Nullum ramum cissoidis situm esse, neque ad partem dextram rectæ BT neque ad partem sinistram puncti A. *5*) Partem curvæ positam esse extra circulum generatorem. (Est punctum illius partis curvæ, ubi concurrunt rectæ AH et eG productæ; si ponuntur $Ae = x$ et $ef = y$, æquationibus (α) et (β) etiam id punctum definietur.)

Si producitur recta Af, donec cum asymptota B T concurrat, erit $AH = fT$; sunt enim:

$$AH : AE = Hf : Ee = fT : eB,$$

unde, quum sit $AE = eB$,

$$AH = fT.$$

Quæ proprietas perfacilem præbet modum cissoidis per puncta describendæ.

Ex æquationo (α), $x^3 = y^2\,(a-x)$, elicitur constructio vel cubi duplicandi, vel alia quadam ratione augendi. Notent enim p latus cubi dati, et q altitudinem parallelopipedi quadratici, quod sit cubo quæsito æquale. Constituuntur ad angulos rectos AB et BT, et abscinduntur $Bm = q$ et $Bh = p$; confecto deinde rectangulo mh, circuli cujusdam cissois ita describitur, ut fiant AB axis et BT asymptota. Ducta denique diagonali Bi, quæ, si opus est, producitur, donec cum curva concurrat, et demissa perpendiculari Kl, erit,

$$\overline{Al}^3 = \overline{lK}^2 \,.\, lB.$$

Tum quæritur quarta proportionalis in proportione $\frac{lB}{mB} = \frac{Al}{s}$, unde ob $\overline{Al}^3 = \overline{lK}^2 \,.\, lB$, et ob triangulos similis KlB et imB, evadet

$$s^3 = \overline{mi}^2 \,.\, mB = p^2 q,$$

ut igitur *s* sit latus cubi quæsiti.

Indicat coefficiens differentialis I[mi]ord, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\,(3a-2x)}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}$, *1*) Rectam AB in puncto A esse tangentem rami utriusque cissoidis. *2*) Rectam S T esse asymptotam. *3*) Nullum in cissoide adesse punctum maximi vel minimi.

Indicat coefficiens differentialis II[di]ord, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(a-x)^2 + x^2}{4x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{5}{2}}}$, totam curvam axem abscissarum versus esse convexam.

Ex formulis satis cognitis perfacile inveniuntur tang., subtang., normal. et subnormal. cissoidis, et constituitur tangens, si datum est punctum axis sive ipsius curvæ. Sic, si constituenda est tangens, transiens per punctum axis, quod ab initio coordinatarum habet distantiam $= \frac{1}{3}a$, erit x (abscissa curvæ in puncto contactus) $= \frac{3}{4}a$.

Not. Ex æquatione cissoidis ad asymptotam relata,

$$x^2 = \frac{(a-y)^3}{y}\ ^{*}), \text{ prodibit}$$

$$\text{Subtang} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\sqrt{ay-y^2}.$$

Cujus expressionis ope, si memoria teneas, $\sqrt{ay-y^2}$ esse ordinatam circuli generatoris, quæ dato puncto respondeat, perfacile tangentes cissoidis constituuntur.

Si notat λ longitudinem arcus cissoidei a puncto A constituti, erit:

$$d\lambda = \frac{a\,dx}{2(a-x)}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}},$$

unde, integrando:

---

*) Eruitur hæc æquatio, si sumitur recta S T pro axe abscissarum, et punctum B pro initio coordinatarum, ut fiant v. c. $Bg = x$, et $gf = y$.

$$\lambda = a \left(\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2 + \sqrt{3} \log \frac{(2+\sqrt{3})\,(\sqrt{4a-3x} - \sqrt{3(a-x)})}{\sqrt{a}} \right)^{*)}.$$

Si quærilur longitudo arcus cissoidei AFC, ut sit $x = {}^1/_2 a$, erit:

$$\lambda = a \left(\sqrt{5} - 2 + \sqrt{3} \log \frac{(2+\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \right);$$

si ponitur $a = 1$, et in memoriam revocatur, modulum logarithmorum naturalium esse 0,43492 ...., erit $\lambda = 0{,}730\ldots$, unde ratio arcus cissoidis et arcus circuli agnosci potest.

Si notat X aream segmenti cissoidei a puncto A constituti, erit:

$$dX = \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

unde, integrando:

$$X = {}^3/_8 a^2 \,.\, \operatorname{arc}(\sin\operatorname{vers} = \frac{2x}{a}) - {}^1/_4(2x + 3a)\sqrt{ax-x^2},$$

quæ expressio, posito $x = {}^1/_2 a$, abibit in hanc:

$$X = {}^3/_{16} a^2 \pi - {}^1/_2 a^2 = {}^3/_4 \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

aut, si notat r radium circuli generatoris,

$$X = {}^3/_4 r^2 \pi - 2r^2 \qquad (1)$$

Porro intelligitur, aream superficiei curvilineæ AFCH esse $2r^2 - {}^1/_2 r^2 \pi$ (2)

Posito $x = a$, erit $X = 3r^2\pi$ (3)

Quid indicent expressiones (1) (2) et (3), id facile apparet; et perspicuum est, plura theoremata similia posse inveniri.

Ex paucis, quæ de curva illa insigni commemoravimus, satis apparet, quam late pateant disquisitiones ejusmodi, sed ne ulterius proferamur, quam sinat propositum nostrum, in iis, quæ jam dicta sunt, subsistere cogimur.

CAP. X.

De mechanicis duas medias continue proportionales inveniendi rationibus in cissoide Dioclis positis.

Post id tempus, quo Nicomedem et Dioclem vixisse statuimus, mathesis pura apud veteres parvos modo progressus fecit; mathematici enim maxime in coelo contemplando et

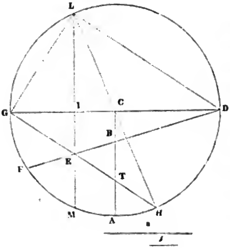
*) Notat „log." logarithmum naturalem.

in Astronomia excolenda versati sunt. Nobis igitur, qui plenam matheseos historiam conscribere non cogitemus, tantummodo Menelaus et Diophantus nominandi sunt, quorum alter (c. 70 p. Ch.) trigonometriam sphæricam in justam disciplinæ formam primus redegit, alter, cujus ætas, quanquam incerta, a Bossut indicatur esse c. 160 p. Chr., analysin indefinitam, quæ ex eo nomen traxit, invenit. Merita autem illorum virorum copiosius tradi, non sinit propositum nostrum.

De Pappo et Sporo.

Qui post Diophantum rebus mathematicis operam dabant, maxime in eo elaborabant, ut commentarios in opera veterum Platonicorum et Alexandrinorum componerent. Rarius accidit, ut novi aliquid ab ipsis inventum adjicerent. Inter ejusmodi commentatores nominandus est Pappus Alexandrinus (c. 400 p. Chr.), qui et de historia matheseos veterum bene meruit, et sæpius insigne ingenii acumen et sollertiam ostendit. In præfatione libri III *collectionum mathematicarum* de natura problematis nostri disputans, primum refellit ille auctor solvendi quandam rationem anonymi cujusdam, qui solutionem vere geometricam in locis planis positam invenisse se putabat; deinde [Prop. V (in vers. Comand. pag. 8)] tribus illis solvendi rationibus Eratosthenis, Nicomedis et Heronis in libro commemorato explicatis, solutionem ab ipso inventam (pag. 11) adjungit, quam tamen et in libr. VIII coll. mathem. [Propos. XI (in vers. Comand.) pag. 463] repetitam et apud Eutocium in comment. ad Archim. de sphær. et cylindr. [lib. II prop. 2 (in edit. Torel.) pag. 139] accurate expositam reperimus.

Ratio autem solvendi Pappi hæc est.



Datæ sint rectæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales inveniantur. Radio datarum majore describitur circulus, et diametro G D ad angulos rectos constituitur radius AC, in quo abscinditur datarum minor b = BC. Ducta recta DBF, in puncto G ita applicatur regula, ut circa illud moveri possit; movetur deinde regula, donec æquales sint ET et TH, et ducitur recta GEH. Si denique constructione geometrica quæritur quarta proportionalis in proportione

$$AC : CT = CT : p, \text{ erit}$$
$$a : CT = CT : p = p : b.$$

Demonstratio.

Ducta recta HCL, demittitur recta LEM, quæ, quum sit ET : TH = LC : CH, erit radio AC parallela, et diametro GD ad angulos rectos. Ductis deinde rectis LG et LD, erit in Δ LGE, ob angulum rectum LGH :

$LI^2 : GI^2 = GI^2 = IE^2$, atqui, ob angulum rectum GLD, est
$LI^2 = GI \cdot ID$, unde

$ID : GI = GI^2 : IE^2$; quum autem sit
$GI : IE = GI : IE$, erit

$ID : IE = GI^3 : IE^3$, atqui sunt
$ID : IE = DC : CB = CA : CB$, et
$GI : IE = GC : CT = CA : CT$; est igitur

$CA : CB = CA^3 : CT^3$ *)

---

*) Quæ sequuntur apud Pappum et Eutocium non inveniuntur, ut verisimile est, quia illi auctores hæc per se ipsa elucere judicabant.

Si denique constituitur p ex proportione

$CA : CT = CT : p$, erit

$CA : CB = CT^2 : p^2$, sive

$a : b = CT^2 : p^2$,

qvæ proportio, in hanc formam redacta,

$a \cdot p : b \cdot CT = CT^2 : p^2$,

in duas proportiones ita solvi potest:

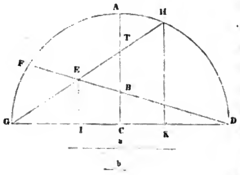
$a : CT = CT : p$ et

$p : b = CT : p$, unde

$a : CT = CT : p = p : b$

q. e. d

Eandem fere solvendi rationem, quam ab ipso inventam explicat Pappus, tradit Eutocius [Comment. in Archim. de sphær. et cylindr. lib. 2. prop. 2 (in edit. Torel.) pag. 141] etiam expositam esse a Sporo vel Poro, de quo tamen nihil aliud constat, nisi hoc, eum paulo post Pappum vixisse videri. Ratio autem ejus solvendi, hæc est:



Sint datæ rectæ a et b, inter quas duæ mediæ continue proportionales inveniantur. Radio datarum majore describitur semicirculus, et diametro GD ad angulos rectos erigitur, radius CA, in quo abscinditur $BC = b$. Ducta recta DBF, in puncto G ita applicatur regula, ut circa illud moveri possit; movetur deinde regula, donec æquales sint ET et TH, et ducitur recta GEH. Si denique constructione geometrica constituitur media proportionalis in proportione

$CT : p = p : BC$, erit

$a : CT = CT : p = p : b$.

Demonstratio.

Si demittitur perpendicularis EI, ut sint $IC = KC$, $IG = KD$, et $KG = ID$, erunt

$$GK : GC = HK : CT \text{ et}$$
$$ID : CD = IE : BC, \text{ unde}$$
$$\overline{HK : CT = IE : BC} \text{ o:}$$
$$HK : IE = CT : BC; \text{ atqvi sunt}$$
$$HK : IE = GK : GI \text{ et}$$
$$GI = KD, \text{ unde}$$
$$\overline{GK : KD = CT : BC;}$$

atqui est

$$GK : KD = CA^2 : CT^2,$$

unde

Efficitur enim

$$HK^2 = GK \cdot KD, \text{ unde}$$
$$\overline{GK : KD = GK^2 : HK^2}; \text{ atqui sunt}$$
$$GK : HK = GC : CT \text{ et}$$
$$\text{et } GC = CA, \text{ unde}$$
$$\overline{GK : KD = CA^2 : CT^2}$$

$$CT : CB = CA^2 : CT^2.$$

Ex proportione, $CT : p = p : BC$, porro erit

$$BC = \frac{p^2}{CT}, \text{ ut igitur efficiatur}$$

$$CT^2 : p^2 = CA^2 : \overline{CT}^2, \text{ sive}$$
$$CT : p = a : CT; \text{ atqui erat}$$
$$CT : p = p : BC, \text{ unde}$$
$$\overline{a : CT = CT : p = p : b}$$

q. e. d.

Perspicuum est, solutiones Pappi et Spori esse prorsus easdem, et illos auctores modo demonstrandi ratione differre, quemadmodum etiam intelligitur, mechanicas illas solvendi rationes positas esse in proprietatibus celeberrimæ illius curvæ Dioclis. Si porro tenemus, Pappum de ratione Dioclis nullam facere mentionem, quum ex non nullis Collectionum mathematicarum locis abunde perspiciatur, cissoidem Dioclis ei non fuisse incognitam, jure forsitan suspicari liceat, Dioclem ab eo data opera esse prætermissum. De Sporo autem nihil constat, unde conjicere possimus, utrum ipse sit auctor solvendi rationis, quæ supra commemorata est, an aliam modo demonstrandi rationem solutioni Dioclis vel Pappi adhibuerit.

Dubitari non potest, quin præter rationes cubi duplicandl, quæ jam commemoratæ sunt, alia quoque apnd veteres facta sint pericula nostri problematis solvendi, quæ tamen omnia memoria exciderunt. Recedamus igitur a veteribus; et quanquam problema duas medias continue proportionales inveniendi nullam in mathesi recentiorum habet vim, tamen, ne historiæ ejus quasi finis desit, quid tentaverint recentiores in nostro problemate, in capite sequente breviter explicare non omittemus.

CAP. XI.

Quomodo recentiores cubum duplicare conati sint.

Quanquam per longum annorum spatium studia literarum, et imprimis matheseos *Alexandriæ* et *Athenis* florebant, tamen in mathesi pura præter ea, quæ jam commemorata sunt, nihil magni momenti inventum esse videmus; nam, ut jam sæpius diximus, in iis, quæ jam cognita erant, excolendis, et in præceptis mathematicis ad usum convertendis maxime versabantur. Et quum postea magis magisque dilaberentur literæ, postremo studia matheseos et ceterarum artium ingenuarum pæne funditus exstincta sunt.

Not. Museum Alexandrinum, quod appellatur, a Ptolomæo Lagi filio aut Ptolomæo Philadelpho (an. circ. 280 a. Chr.) institutum, diu tranquillum refugium omnium bonarum artium erat; et quanquam, ob crudelitatem Ptolomæi Euergetis II, multi homines docti emigrabant (a. circ. 130 a. Chr.), et quanquam permulti libri, quum Cæsar in Ægypto bellum gereret, comburebantur, tamen docti, qui in museo Alexandrino sumptu regum alebantur, studiis literarum maxima industria, neque sine progressu, operam dabant. Sed post tempora Augusti etiam in Ægypto magis magisque evanuerunt literarum studia, et regnante Hadriano (117—138 p. Chr.), qui quidem fautor literarum videri voluit, eo perventum erat, ut, ob facete et blande dictum, loci in museo hominibus, qui literarum omnino erant imperiti, tanquam beneficia imperatoria attribuerentur; quin etiam athletam locum in museo habuisse accepimus. — Qui docti adhuc Alexandriæ vivebant, multos expulit Caracalla (212—217), et, invecta religione christiana, museum ludus factum est, in quo, quum præceptores christiani non nisi de institutione religionis curarent, disciplinæ literarum usum vitæ spectantes discerentur. — Regnante Juliano Apostata (355—363) studia literarum etiam in Ægypto rursus paululum progressa esse videntur; sed temporibus Theodosii Magni (379—395) doctrina pagana Alexandriæ omnino exstincta est, et quum postea variis temporibus libri Alexandriâ maxime Constantinopolin auferrentur, quumque homines, qui in Ægypto literis adhuc

operam dabant, in astrologia, alchymia et maxime in miseris controversiis religiosis versarentur, vix ullius momenti erat detrimentum, quod fecerunt artes, quum Arabes, regnante Omaro Califo, Alexandriam expugnarunt (642), et, id quod tamen in dubio est, quæ ex bibliothecis reliqua erant, combusserunt. —

Etiam Athenis in schola Platonicorum, et postea in schola Neo-Platonicorum, qui appellabantur, diu floruerunt artes, et quum docti seditionibus intestinis et bellis civilibus hic minus vexarentur, quumque ex Ægypto multi homines docti diversis temporibus illô confugerent, Athenas, seculis primis p. Chr., studiis literarum Alexandriæ haud parum præstitisse accepimus. Invecta religione christiana, maxime colebantur disciplinæ usum vitæ spectantes; sed hic quoque artes omnino ceciderunt, quum Julianus I (529) scholas philosophorum claudi jussit*).

Arabibus autem est attribuendum, quod aliquando renatæ sunt artes literarum, et imprimis mathesis; annis enim vix CXX post Mahomedem præterlapsis, mathematicos, scientia bene instructos, apud eos floruisse videmus. A veteribus discebant Arabes, et in eorum operibus (quæ a Græcis acceperant) vertendis et explicandis diligentissime versabantur. Sed in nostro problemate solvendo, num quid tentaverint, non constat; quum autem algebram, quæ vocatur, ab iis inventam, aut saltem excultam, ad geometriam adhibere nescirent, non verisimile videtur, novi quidquam, ad nostrum problema spectans, ab iis esse inventum.

Studia matheseos ab Arabibus in Hispaniam translata, etiam ceteris occidentalibus cognita esse cœperunt; barbaries antem mediæ ætatis, ut satis notum est, prohibuit, quo minus occidentales aut in mathesi aut in aliis literarum artibus proficerent, et quum aliquando renatæ sunt literæ, longum prius lapsum est spatium temporis, quam literarum studosi, operibus veterum edocti, eo profecerunt, ut ad ipsam scientiam amplificandam et augendam aggrederentur. In nostro problemate pertractando etiam horum temporum mathematici sæpius versati sunt, sed solutiones inventæ aut nihil ad scientiam amplificandam et augendam adferunt, aut sunt prorsus prsvæ. Itaque, quanquam non est, cur diutius in his moremur, tamen silentio præterire non possumus, *Orontium Finæum* (circ. 1550), et *Raphaelum Bombellum* (circ.

*) In iis, quæ de museo Alexandrino et schola Platonicorum tradidimus, maxime secuti sumus Dr. Parthey (Das alexandrinische Museum. Berlin 1838).

1570), quorum alter problema cubi duplicandi ad quadraturam circuli inveniendam adhibere studuit*) alter vero constructione geometrica, quæ a Platonis ratione supra commemorata parum differt, „casum irreducibilem" æquationum gr. 3tii illustrare conatus est.

Quod inceperat Bombellus, id latius produxit Vieta (circ. 1590). Ammadvertit enim sagacissimus ille mathematicus; si in æquatione gradus 3tii modo una inesset radix realis, eam cubo duplicando, si vero tres adessent radices reales, eas angulo trisecando posse inveniri. Ad ipsum autem problema cubi duplicandi solvendum mechanicas solum solutiones adhibuit, et eum secuti sunt ceteri illorum temporum mathematici, qui quidem nostrum problema solvere conati sint.

Quod conspicati sunt Bombellus et Vieta id clarissime intellexit celeberrimus ille *Cartesius* (nat. 1596 mort. 1650), qui primus (in geometriæ libr. II) explicat, quomodo curvæ æquatione coordinatarum definiri possint; in libro tertio (pag. 85 et sequ.**) deinde docet rationem generalem construendi omnia problemata solida, reducta ad æquationem gr. 3tii vel 4ti, et exempla adjungit solutiones problematum cubi duplicandi angulique trisecandi; denique in eodem libro explicat, quomodo omnia problemata solida ad duas illas constructiones referri possint. Sine causa autem statuit Cartesius, non licere, problema per lineam altioris gradus construere, quod per lineam inferioris gradus construi possit.

Not. Ad inveniendas duas medias continue proportionales inter datas a et b, Cartesius utitur parabola, cujus æquatio est $y^2 = ax$. In axe hujus parabolæ abscinditur a vertice $\frac{1}{2}a$, et a puncto ita constituto erigitur perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Radio deinde distantiâ inter terminum superiorem hujus perpendicularis et verticem parabolæ, describitur circulus, qui per verticem et aliud quoddam punctum parabolæ transibit. His ita confectis, erunt ordinata et abscissa parabolæ in puncto intersectionis, quod non est vertex, quæsitæ mediæ continue proportionales.

Ex proprietate enim circuli efficietur

$$x^2 - ax = by - y^2;$$

quum vero sit ex proprietate parabolæ

*) Rationem ejus solvendi pravam esse, id jam ostenderunt æquales auctoris Petrus Nonius et Johannes Buteo.

**) Editio Francesci a Schooten, Amstelodami 1683.

$$\begin{array}{l} y^2 = ax, \text{ erit etiam} \\ x^2 = by, \text{ unde} \\ \hline a : y = y : x = x : b. \end{array}$$

Quam viam ingressus erat Cartesius, eam secuti sunt etiam ceteri ejus ætatis clarissimi mathematici, qui in rectificatione, area, cubatura, aliisque proprietatibus curvarum investigandis diligentissime versabantur. Merita Cavalerii Robervalli, Hugenii, Pascali aliorumque seculi XVII^mi mathematicorum, qui plerique nostrum etiam problema tractaverunt, magis nota sunt, quum ut secundum propositum nostrum uberius de iis sit disputandum. Inter studia autem, ad ipsum nostrum problema spectantia, Slusii omnino prætermittere non possumus; ostendit enim sagacissimus ille mathematicus, duas medias continue proportionales etiam intersectione circuli et ellipseos inveniri posse, id quod nemo neque veterum neque recentiorum ante eum intellexerat.

Merita præclarissimi Newtoni (nat. 1642 mort. 1727) de omnibus fere matheseos partibus, integra adhuc vigent, ut non opus sit, in hoc libello diutius in iis morari. In problematis geometricis solvendis, sententiam Cartesii non amplectens, statuit, in omni constructione, adhibendam esse curvam, quæ facillime describi possit, et gradum æquationis, qua definiatur curva, non esse spectandum. Itaque ad æquationes gradus 3^tii geometrice construendas conchoidem, quamquam ad quatuor dimensiones ascendebat, omni curvæ prætulit, et ejus ope rationem simplicissimam et elegantissimam cubi duplicandi docuit.

Not. Constructiones Newtoni, et nostri problematis et illius anguli trisecandi, explicatas legimus in „*Arithmetica Universalii Is. Newtoni*“ (Lugd. Batav. 1732) pag. 227 et sequ.; quum autem demonstrationes constructionum adhibitarum exponere non possimus, nisi celeberrimi illius auctoris rationem æquationum 3^tii et 4^ti gr. generatim construendarum integre tradamus, lectorem benevolentem ipsos fontes adire cogimur ut jubeamus.

Quanquam ingenio et sagacitate Newtoni factum est, ut de natura problematis quæri non posset, plures tamen seculi XVIII^mi homines in eo pertractando versatos esse videmus, sed, ut facile judicari potest, sine ullo successu. Nomina et opera quorundam auctorum ejusmodi ad finem libri Reimeri sæpius citati enumerata reperiuntur.

Conatibus recentiorum ad problema cubi duplicandi pertinentibus breviter traditis, generalem problematis solvendi rationem postremo adjungere non omittimus.

Si notat a latus cubi dati, et x latus cubi, cujus volumen sit n partibus majus quam datum, erit

$$x^3 = na^3, \text{ sive}$$
$$x^3 - na^3 = 0, \qquad (1)$$

ut posita sit solutio problematis in æquatione gradus 3^{tii}, cujus termini secundus et tertius desunt, construenda, id quod, si præter curvam recta modo est adhibenda, ope aut conchoidis aut cissoidis (pag. 45) perfici potest. Si vero constructio intersectione duarum curvarum est conficienda, æquatio, qua definitur problema, saltem quarti gradus esse debet; efficietur igitur

$$x^4 - na^3x = 0,$$

quam æquationem ex duabus 2^{di} gradus æquationibus, dua incognita x et y continentibus, eliminando ortam fingere possumus. Quum vero æquatio $x^4 - na^3x = 0$ modis innumerabilibus, ex duabus æquationibus 2^{di} gradus eliminando gigni possit, licet ex iis unam ex arbitrio statuere, unde intelligitur, problema modis innumerabilibus solvi posse. Ponamus itaque

$$x^2 = ry,$$

ubi sumitur r ex arbitrio; erit igitur

$$y^2 = \frac{na^3}{r^2}x.$$

Posito deinde r = a, duæ illæ æquationes abibunt in has:

$$x^2 = ay \text{ et} \qquad (2)$$
$$y^2 = nax \qquad (3)$$

Intelligitur, duabus illis æquationibus definiri parabolas, quæ, si describuntur ratione supra (pag. 18) indicata, et in vertice et in alio quodam puncto se invicem secabunt. Radix intersectioni verticum respondens, ex factore alieno x, in æquationem datam introducto, orta, non est radix æquationis (1). Si vero axis utriusque parabolæ sumitur pro axe abscissarum, erit ordinata parabolæ, æquatione (2) definitæ, puncto alteri intersectionis respon-

dens, aut, id quod idem est, abscissa parabolæ, æquatione (3) definitæ, eidem puncto respondens, latus cubi quæsiti.

CAP. XII.

Comparantur analysis veterum et analysis recentiorum.

Quum ad quæstiones, quas alio tempore de methodo matheseos docendæ instituere cogitamus, et quibus hac dissertatione quasi fundamenta jacere studuimus, nobis opus sit comparatione methodi analyticæ veterum et recentiorum, optime cum nostro proposito congruere videtur, si in fine hujus libelli ex exemplis analyseos veterum et recentiorum supra traditis, illam comparationem instituere conabimur.

Ex iis, quæ in Cap. VI explicata sunt, et exemplis (in Cap. V) propositis satis intelligitur, analysin veterum in eo præcipue positam fuisse, ut, quum quæsitum datum esse poneretur, per seriem conclusionum eo usque procederetur, donec postremo positum esset, de quo per se eluceret, utrum verum esset sive fieri posset, necne. Quum vero magis exculta erat analysis, veteres etiam cognita et incognita sine ullo discrimine comparabant; sic Archimedes [De sphær. et cylindr. lib. II prop. 5 (in edit. Torelli pag. 157)] *), comparando quanta, nulla habita ratione utrum cognita essent necne, et adhibendo lemmata, ex proprietatibus sphæræ et coni deducta, proportionem invenit, unde, si more recentiorum exprimitur, erui potest æquatio 3tii gr., ex qua pendet solutio problematis, quam tamen, nulla adhibita methodo, quæ aliqua ex parte constructionis expressionum algebraicarum similis haberi potest, artificia singularia adhibendo confecit auctor.

Ex iis, quæ jam dicta sunt, ut nobis videtur, satis perspicitur, nullum, si principium et originem spectamus, statuendum esse discrimen essentiale inter analysin veterum et analysin recentiorum, id quod tamen non omnibus placuisse videtur.

*) Proponitur hoc problema: „Datam sphæram secare, ita ut sphæræ segmenta eandem, quæ data est, inter se invicem rationem habeant.“

Subsidia autem analyseos apud veteres et recentiores longe esse diversa accepimus.

Veteribus enim, ut ex exemplis supra traditis apparet, ad quæstiones analyticas instituendas opus erat variis theorematis, quæ quasi lemmata ex variis geometriæ partibus petebantur. Quum vero studio et acumine illustrium mathematicorum, quales erant Euclides, Archimedes, Apollonius, cet., analysis veterum sensim sensimque ad culmen perduceretur, præter opera, quæ omnis eruditionis mathematicæ quasi fundamenta æstimabantur, etiam componebantur libri, qui præcipue usum analyseos spectabant.

Not. Opera, quibus in quæstionibus analyticis, tanquam subsidiis, maxime usi sunt veteres, apud Pappum [Coll. math. in præf. lib. VII (in vers. Command. pag. 241)] enumerata invenimus; et eo magis laudandus est ille auctor, quod etiam horum librorum, quorum plerique nunc perditi sunt, argumenta sæpius tradit, unde factum est, ut, Pappum sequentes, complures mathematici recentiores, non sine profectu, illos libros restituerint. Ceterum opera a Pappo, loco citato commemorata, hæc sunt:

a) **Euclides.**

Datorum lib. I, qui adhuc exstat. — *Porismatum* lib. III, qui perditi illi quidem sunt, sed restituti inveniuntur in Roberti Simson „Operibus quibusdam reliquis". — *De locis ad superficiem* lib. II, quorum argumentum non commemorat Pappus.

b) **Apollonii Pergæi.**

Sectionum conicarum lib. VIII, qui adhuc exstant, tamen aliqua ex parte modo ex versione Arabica in linguam latinam conversi. — *De sectione rationis* lib. II, qui adhuc exstant. — *De sectione spatii* lib. II, ab Edm. Halley restituti (Oxon. 1706). *De sectione determinata* libri, a Rob. Simson (in oper. quibusd. reliqu.) restituti. — *De tactionibus* libri, a Vieta restituti (Apollonius Gallus. Parisiis 1600). — *De inclinationibus* lib. II, a Sam. Horsley restituti (Glasg. 1749).

c) **Aristæi.**

De locis solidis lib. V, a Vivanio restituti (Flor. 1701).

d) **Eratosthenis.**

De mediis proportionalibus lib. II, quorum argumentum non indicat Pappus.

Sed ad lemmata supra commemorata adhibenda semper opus est præparationibus quibusdam, quæ in eo maxime positæ sunt, ut lineæ auxiliariæ idoneæ ducantur. id quod sæpius non sine maxima sagacitate animi perfici potest. Præcepta enim, quæ in illis

lineis ducendis sunt sequenda, ex natura singulorum problematum, et adhibitorum lemmatum sunt petenda, ut nihil amplius de iis generatim statui possit, quam quod (Arithm. univers. Lugd. Bat. 1732 pag. 87) præscribit Newtonus his ipsis verbis: „Sed ut hujusmodi theoremata ad solvenda problemata accommodari possint, schemata plerumque sunt ultra construenda, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares; vel insigniora puncta conjungendo, ut et aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status problematis, et theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes constituant triangulum, cujus anguli et proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus. demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales. Et sic in ceteris; ad hanc metam semper collimando, *ut schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur.*"

Recentiores autem, ut constat, subsidiis commemoratis in quæstionibus analyticis non utuntur; omnia enim, nulla figuræ ratione habita, ad calculum algebraicum revocantur, cujus ope, quum relatio cognitorum et incognitorum ex natura propositi per æquationem est constituta, quæstio ipsa fere mechanice eo usque producitur, donec postremo (quod fit in analysi sublimiore integrando) incognita, tanquam functiones ex cognitis pendentes expressa, emergunt; et, quum de problematis agitur, interdum accidit, ut illæ functiones geometrice construi possint.

Not. Quanquam igitur, si subsidia methodorum respicimus, multum interest inter analysin veterum et recentiorum, tamen synthesin veterum plane immutatam nostris etiam temporibus adhiberi videmus; nomen autem „*synthesis*" notat apud recentiores non modo synthesin verum etiam analysin veterum, ut quum in subsidiis anatyticis tum in usu loquendi positum sit, quod analysis et synthesis apud recentiores se invicem longe aliter habent, quam atque veteres.

Ex iis, quæ de subsidiis analyseos jam explicavimus, intelligitur, analysin veterum summam sagacitatem et acumen animi per totam quæstionem requirere, quum analysis recentiorum, non nisi problemate in æquationem redigendo, et (in analysi snblimiore) æquationibus differentialibus integrandis aliquam præbeat difficultatem. Inde sequi videtur, ut methodus analytica veterum, quamquam nostris temporibus ad ipsam scientiam augendam et amplificandam vim nullam habere potest, tamen; si institutio mathematica spectatur, magni sit facienda.

Antecellunt igitur veteribus in eo maxime mathematici recentiores, *quod in quæstionibus analyticis quanta prorsus abstracte considerent,* unde factum est, ut, quum ratione variarum proprietatum quantorum non impediatur quæstio, et generaliores emergant leges, quibus definiantur incognita ex cognitis, et comprehendat analysis recentiorum multa, quæ extra fines analyseos veterum sita sint, unde rursus sequitur, 1) ut multa proposita, quæ veteres tanquam diversa problemata tractabant, apud recentiores modo sint casus singulares problematis cujusdam generalioris, 2) ut analysis recentiorum non modo fines disquisitionum geometricarum latius protulerit, quam ope analyseos veterum fieri potuit, verum etiam, ut omnia, quæ quantitate prædita sint, amplecti possit.

Postremo, si in unum colligimus, quæ supra de analysi veterum et analysi recentiorum explicavimus, intelligitur, eas natura methodi non differre; in utraque enim propositum jam cognitum statuitur, aut sine ullo descrimine cognita et cognita comparantur, et quæritur, quomodo propositum ex dato pendeat, aut quomodo illud per hoc definiatur. Differunt autem et subsidiis methodi et materia ad quam adhibentur. Veteres enim, quum non nisi ex figuris contemplandis concluderent, in theorematis antea demonstratis adhibendis, et in lineis auxiliariis idoneis ducendis omne præsidium posuerunt. Recentiores autem figuras omnino non contemplantes, omnia, ope algebræ, ad calculum referre conantur. Veterum analysis mathematica in Geometriam solam adhiberi potest, reoentiorum autem omnia, quæ mensura definiri possunt, complectitur.

CORRIGENDA.

Pag. 6 v. 13 „*majoribus*“ scriptum est pro „*majoribus*“
— 29 (not. **) „*Non est, ut vult Reimerus (pag. 107)*“, scriptum est pro „*Ut observat Reimerus (pag. 107), non est*“
— 40 v. 26 (2 *b* x) scriptum est pro (2 *b* + x)

THESES.

1) Discrimen analyseos veterum et recentiorum in diversitate subsidiorum præcipue positum est.

2) Ut ratio syntheseos et analyseos hodie alia sit atque antiquitus fuit, id partim eo factum est, quod analysis recentioribus temporibus aliam formam induit, partim quod recentiores notione syntheseos etiam analysin veterum comprehendunt.

3) Aberratio stellarum fixarum non est, ut quidam voluerunt, demonstratio directa, rationem mundi Copernicanam veram esse.

4) Quod mechanici „*punctum materiale*“ vocant, potius „*elementum materiale*“ appellandum est.

5) Analytica solutio problematis potentias componendi atque decomponendi subtilitati mathematicæ non satisfacit.

6) Demonstratio mathematica *principii celeritatum virtualium*, quod appellatur, manca est.

7) Principium dynamicum rationis potentiarum et celeritatum hypothesis est habenda.

8) Si in navi vaporaria „E“ significat momentum potentiæ machinæ vaporariæ, „A“ aream planitiei perpendicularis, quæ, navi se movente, aquæ opposita fingi potest, „a“ aream alicujus ex pennis, „v“ celeritatem navis, „φ“ coefficientem experimentis cognitum, efficietur:

$$E = A\varphi v^3\left(1+\sqrt{\frac{A}{a}}\right);$$

non, ut vult Precthl (Technol. Encyclop. 4ter Bd. pag. 25(et multi alii eum sequentes;

$$E = A\varphi v^3\sqrt{1+\frac{A}{a}}.$$